

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

MARIA CIBRARIO

## Sulla dimostrazione di un teorema di esistenza

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. **17** (1938), n.2, p. 94–98.

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1938\\_1\\_17\\_2\\_94\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_94_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Sulla dimostrazione di un teorema di esistenza.

Nota di MARIA CIBRARIO (a Torino).

**Sunto.** - Si dà una dimostrazione più generale di un teorema di esistenza, già dimostrato sotto ipotesi particolari, per l'equazione di tipo misto iperbolico-ellittica:  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Il metodo ha carattere generale ed è applicabile in molti altri casi analoghi.

In una mia Memoria <sup>(1)</sup>, dedicata allo studio dell'equazione di tipo misto iperbolico-ellittica:

$$(A) \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

sono introdotte le parabole:

$$4x + (y - y_0)^2 = k \quad (k \text{ costante}),$$

che sono dette *curve normali* per l'equazione (A); considerata poi una particolare curva normale  $\sigma$ , corrispondente a  $k > 0$ , e supposto, il che non è restrittivo, che la sua equazione sia:

$$(1) \quad 4x + y^2 = 1,$$

è enunciato il teorema <sup>(2)</sup>:

« Nel dominio D, avente per contorno l'arco c della curva normale  $\sigma$ , posto nel semipiano  $x \geq 0$ , e gli archi di caratteristiche della (A), uscenti dai punti  $(0, -1)$  e  $(0, 1)$  dell'asse y (cioè uscenti dagli estremi dell'arco c) e corrispondenti a  $0 \geq x \geq -\frac{1}{4}$ , esiste uno e un solo integrale  $z(x, y)$  della (A), che su c assume valori dati nella forma «  $x\varphi(y)$  », dove  $\varphi(y)$  è finita e continua nei punti di c, estremi inclusi, e quindi è finita e continua per  $-1 \leq y \leq 1$ .

<sup>(1)</sup> M. CIBRARIO, *Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica*, « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. III (1934), pp. 255-285. V. in particolare, il § 4, pp. 276-280.

<sup>(2)</sup> M. CIBRARIO, loc. cit., § 4, T. IX, pp. 276-277.

Tale integrale  $z(x, y)$  è funzione analitica di  $x, y$  nei punti interni al dominio  $D$ , anche in quelli posti nel semipiano  $x < 0$ , dove la (A) è del tipo iperbolico, e in quelli appartenenti al segmento  $-1 < y < 1$  dell'asse  $y$ , cioè della retta parabolica dell'equazione ».

Tale teorema è dimostrato nella Memoria citata, introducendo l'ipotesi ulteriore che la funzione  $\varphi(y)$  ( $-1 \leq y \leq 1$ ) sia sviluppabile in serie di polinomi sferici generalizzati; e questo perchè tale ipotesi è soddisfatta nei casi, che si presentano nel seguito del lavoro, così che la dimostrazione data è sufficiente agli scopi in esso prefissi.

Il teorema si può però dimostrare in tutta la sua generalità, e a tale scopo è dedicata la presente Nota; mi è grato porgere i più vivi ringraziamenti al prof. SANSONE, che mi ha dato qualche utile consiglio. La dimostrazione qui esposta è applicabile a molti altri problemi dello stesso tipo, e suscettibile di varie generalizzazioni.

Se esiste l'integrale  $z(x, y)$  della (A), che soddisfa il teorema, esso soddisfa la (A), in particolare, per  $x=0$ ; è dunque:  $\frac{\partial^2 z(0, y)}{\partial y^2} = 0$ , e  $z(0, y)$  è funzione lineare di  $y$ ; poichè per ipotesi  $z(0, -1) = 0$ ;  $z(0, 1) = 0$ , la  $z(x, y)$ , supposta esistente, è nulla su tutto il segmento  $-1 \leq y \leq 1$  dell'asse  $y$ .

Che esista al più un integrale della (A), soddisfacente le condizioni del teorema, segue da un teorema di unicità più generale, dimostrato per l'equazione (A) nella Memoria citata <sup>(2)</sup>.

Nella parte  $\delta$  di  $D$ , posta nel semipiano  $x > 0$ , e limitata dunque dall'arco  $c$  di curva normale e dal segmento  $-1 \leq y \leq 1$  dell'asse  $y$ , si introducano le variabili  $\rho$  e  $\tau$ , legate alle  $x, y$  dalle relazioni:

$$(2) \quad x = \frac{\rho^2(1 - \tau^2)}{4}, \quad y = \rho\tau, \quad (0 \leq \rho \leq 1; -1 \leq \tau \leq 1).$$

L'arco  $c$  di curva normale ha equazione  $\rho = 1$ , e la funzione assegnata su di esso è:

$$x\varphi(y) = \frac{1 - \tau^2}{4} \varphi(\tau).$$

Per le ipotesi fatte sulla funzione  $\varphi$ , esiste una quantità positiva  $\mu$ , tale che:

$$(3) \quad |\varphi(\tau)| \leq \mu, \quad (-1 \leq \tau \leq 1).$$

Si costruiscano i coefficienti  $c_n$  dello sviluppo di  $\varphi(\tau)$  in serie

<sup>(2)</sup> M. CIBRARIO, loc. cit., § 2, T. V, p. 269.

di polinomi  $C_n^{3/4}(\tau)$ , serie sulla cui convergenza non si fa alcuna ipotesi; è:

$$(4) \quad c_n = \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} \int_{-1}^1 \varphi(t)(1-t^2)C_n^{3/4}(t)dt;$$

e si costruisca la serie:

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \rho^n C_n^{3/4}(\tau),$$

che è uniformemente convergente <sup>(4)</sup> in ogni dominio  $\delta_1$ , corrispondente a:  $-1 \leq \tau \leq 1$ ,  $0 \leq \rho \leq \rho_1$ , comunque si prenda  $\rho_1$  minore di uno. I prodotti  $\rho^n C_n^{3/4}(\tau)$  sono uguali a certi polinomi  $P_n(x, y)$ , tali che le  $z(x, y) = xP_n(x, y)$  sono integrali particolari della (A) <sup>(5)</sup>. La serie:

$$(6) \quad z(x, y) = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n C_n^{3/4}(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_n(x, y),$$

è una serie di integrali della (A) uniformemente convergente in ogni dominio  $\delta_1$ , e quindi <sup>(6)</sup> è un integrale della (A) in tutti i punti interni a un dominio  $\delta_1$ , e dunque in tutti i punti interni al dominio  $\delta$ . La  $z(x, y)$  inoltre si annulla nei punti del segmento  $-1 < y < 1$  dell'asse  $y$ .

Per provare che l'integrale  $z(x, y)$ , dato dalla (6), sull'arco  $c$  di curva normale assume proprio i valori assegnati, si ponga:

$$f(\rho, \tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \rho^n C_n^{3/4}(\tau);$$

la  $f(\rho, \tau)$  è definita per  $-1 \leq \tau \leq 1$ ,  $0 \leq \rho < 1$ . Il limite:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} f(\rho, \tau) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \rho^n C_n^{3/4}(\tau),$$

è la somma di POISSON-ABEL della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n C_n^{3/4}(\tau)$ ; questa, in generale, non è convergente, ma è sommabile  $(C, \delta)$  per  $\delta$  abbastanza elevato <sup>(7)</sup> alla funzione  $\varphi(\tau)$ , e anzi, poichè  $\varphi(\tau)$  è continua nell'intervallo  $-1 \leq \tau \leq 1$ , la serie è uniformemente sommabil-

<sup>(4)</sup> M. CIBRARIO, loc. cit., § 4, p. 278.

<sup>(5)</sup> M. CIBRARIO, loc. cit., § 3, p. 275, form. (8) e (9).

<sup>(6)</sup> M. CIBRARIO, loc. cit., § 2, T. VIII, p. 272.

<sup>(7)</sup> KOGBETLIANTZ, *Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques*. « Journ. de Math. », S. IX, T. 3 (1924), pp. 107-187. V. il § 5, pp. 168-169.

(C,  $\delta$ ) alla funzione  $\varphi(\tau)$  in tale intervallo.<sup>(8)</sup> Ne segue subito che è anche <sup>(9)</sup>:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} f(\rho, \tau) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \sum_n c_n \rho^n C_n^{3/2}(\tau) = \varphi(\tau),$$

e la  $f(\rho, \tau)$  tende uniformemente alla  $\varphi(\tau)$  nell'intervallo  $-1 \leq \tau \leq 1$  per  $\rho$  tendente a uno.

Se  $(x_1, y_1)$  è un punto dell'arco  $c$  di curva normale, e se si pone:  $x_1 = \frac{1 - \tau_1^2}{4}$ ,  $y = \tau_1$ , e se si ricorda che  $\rho, \tau$  sono legate alle  $x, y$  dalle (2), dalla (6) e dai risultati precedenti segue che:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow y_1}} z(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ \tau \rightarrow \tau_1}} z(x, y) = x_1 \varphi(y_1),$$

cioè che l'integrale  $z(x, y)$  della (A) dato dalla (6) assume proprio sulla curva normale  $c$  i valori assegnati.

L'integrale  $z(x, y)$  della (A), che soddisfa il teorema, si può porre nei punti interni al dominio  $\delta$  anche sotto un'altra forma, che non era stata data nella Memoria più volte citata, e che permette di studiare rapidamente le proprietà dell'integrale stesso. Nella (6) sostituendo alle  $c_n$  le loro espressioni (4), si ottiene, poichè in ogni dominio interno a  $\delta$  tutte le serie considerate convergono uniformemente:

$$z(x, y) = \frac{x}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) (1 - t^2) \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} C_n^{3/2}(\tau) C_n^{3/2}(t) \rho^n \right\} dt,$$

e, poichè è <sup>(10)</sup>:

$$C_n^{3/2}(\tau) C_n^{3/2}(t) = \frac{(n+1)(n+2)}{\pi} \int_{-1}^1 (1 - \lambda^2)^{1/2} C_n^{3/2}(\chi) d\lambda,$$

dove:

$$(7) \quad \chi = t\tau + \sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\tau^2} \lambda,$$

è anche:

$$z(x, y) = \frac{x}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) (1 - t^2) dt \int_{-1}^1 (1 - \lambda^2)^{1/2} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n + \frac{3}{2}\right) \rho^n C_n^{3/2}(\chi) \right\} d\lambda.$$

<sup>(8)</sup> KOGBETLIANTZ, loc. cit., p. 118.

<sup>(9)</sup> Se una serie è sommabile (C,  $\delta$ ) con somma  $S$ , esiste anche la sua somma di POISSON-ABEL e vale  $S$ . V. per es. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, Chap. III, n. 40, p. 107. V. anche KOGBETLIANTZ, loc. cit., § 4, pp. 154-155.

<sup>(10)</sup> KOGBETLIANTZ, loc. cit., form. (4), p. 111.

Ma <sup>(11)</sup>:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n + \frac{3}{2}\right) \rho^n C_{n^{3/2}}(\chi) = \frac{3}{2} \frac{1 - \rho^2}{(1 - 2\rho\chi + \rho^2)^{3/2}},$$

e quindi:

$$(8) \quad z(x, y) = \frac{3}{2\pi} x(1 - \rho^2) \int_{-1}^1 \varphi(t) (1 - t^2) dt \int_{-1}^1 \frac{(1 - \lambda^2)^{1/2}}{(1 - 2\rho\chi + \rho^2)^{3/2}} d\lambda,$$

dove  $\rho$ ,  $\tau$  sono legate alle  $x$ ,  $y$  dalle (2), e  $\chi$  è dato dalla (7). La (8) dà in  $z$  una nuova forma dell'integrale  $z(x, y)$  della (A), che soddisfa il teorema; si è così dimostrata l'esistenza di tale integrale nella parte  $\delta$  di  $D$ , posta nel semipiano  $x \geq 0$ . Si trova subito che per  $|y| < 1$ , è:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z(x, y)}{x} = \left( \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n+1)(n+2) y^n = v(y),$$

e che, per la continuità di  $\varphi(y)$  nei punti  $y = \pm 1$  e per quanto precede, è:

$$v(1) = \varphi(1); \quad v(-1) = \varphi(-1).$$

Inoltre è, in tutto  $\delta$ :

$$(9) \quad \left| \frac{z(x, y)}{x} \right| < \mu, \quad |v(y)| < \mu, \quad (|y| \leq 1).$$

La dimostrazione dell'esistenza dell'integrale  $z(x, y)$  nella parte di  $D$ , posta nel semipiano  $x \leq 0$ , quella della continuità delle sue derivate per  $x = 0$ , e dell'analiticità di  $z(x, y)$  nei punti interni al dominio  $D$ , restano quali erano nella Memoria citata <sup>(12)</sup>.

La presente dimostrazione vale anche se la funzione  $\varphi(y)$  assegnata è continua solo per  $|y| < 1$  e non per  $y = \pm 1$ , purchè esista un numero positivo  $\mu$ , per cui sia:

$$|\varphi(y)| < \mu, \quad (|y| \leq 1).$$

Allora non si può dire nulla circa il comportamento di  $v(y) = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=0}$  nei punti  $y = \pm 1$ ; valgono però le (9), e la  $z(x, y)$  è continua e nulla nei punti  $y = \pm 1$  dell'asse  $y$ .

Queste considerazioni permettono di semplificare le dimostrazioni nel seguito della Memoria citata, e, in particolare, di evitare le considerazioni minute, esposte nella nota (27) a pag. 280 della Memoria stessa.

<sup>(11)</sup> KOGNETLIANTZ, loc. cit., form. (7), p. 112.

<sup>(12)</sup> M. CIBRARIO, loc. cit., pp. 279-280.