

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIUSEPPE PALAMÀ

## Ancora sui polinomi di Laguerre

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. **17** (1938), n.2, p. 90–94.

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1938\\_1\\_17\\_2\\_90\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_90_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

### Ancora sui polinomi di Laguerre.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

**Sunto.** - *Sfruttando l'identità  $e^D = 1 + \Delta$ , si danno alcune nuove formule per i polinomi di LAGUERRE.*

In questa Noticina, come si disse alla fine della piccola Nota precedente <sup>(1)</sup>, diamo qualche altra formula relativa ai polinomi

<sup>(1)</sup> Questo stesso volume, pag. 19-26.

di LAGUERRE, sfruttando la relazione simbolica

$$(1) \quad e^D = 1 + \Delta,$$

nella quale  $D$  sta per  $\frac{\partial}{\partial x}$  e  $\Delta$  è il solito simbolo di differenza finita.

1. Se poniamo

$$1 + \Delta = \delta,$$

dalla (1) abbiamo

$$(2) \quad e^{pD} = \delta^p, \quad (3) \quad (e^D - 1)^m = \Delta^m,$$

$$(4) \quad \text{sh } D = \frac{\delta - \delta^{-1}}{2}, \quad (5) \quad \text{ch } D = \frac{\delta + \delta^{-1}}{2},$$

$$(6) \quad \text{sh}^2 D = \frac{\delta^2 + \delta^{-2} - 2}{4}, \quad (7) \quad \log(1 + \Delta) = D$$

e da quest'ultima

$$(8) \quad \log^r(1 + \Delta) = D^r.$$

Inoltre è evidente l'identità

$$(9) \quad \sum_{j=0}^m e^{jD} = \frac{e^{(m+1)D} - 1}{e^D - 1},$$

ed è facile verificare quest'altra:

$$(10) \quad \sum_{j=0}^m (j+1)e^{jD} = \frac{(m+1)e^{(m+2)D} - (m+2)e^{(m+1)D} + 1}{(e^D - 1)^2}.$$

Le (3), (9), (10) possono rispettivamente scriversi

$$(3_1) \quad \sum_{j=1}^m (-1)^j \binom{m}{j} e^{jD} = (-1)^m \Delta^m - 1,$$

$$(9_1) \quad \sum_{j=1}^m e^{jD} = (\delta^{m+1} - 1) \Delta^{-1} - 1,$$

$$(10_1) \quad \sum_{j=1}^m (j+1)e^{jD} = (m+1)\delta^{m+2}\Delta^{-2} - (m+2)\delta^{m+1}\Delta^{-2} + \Delta^{-2} - 1.$$

Svolgendo il 1° membro delle (2), (3<sub>1</sub>), (4), (5), (6), (9<sub>1</sub>), (10<sub>1</sub>) secondo le potenze crescenti di  $D$  e il 1° membro delle (7) e (8) secondo le potenze crescenti di  $\Delta$ , si ha rispettivamente

$$(2') \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^m D^m}{m!} = \delta^p,$$

$$(3_1') \quad \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \binom{m}{j} (jD)^r}{r!} = (-1)^m \Delta^m - 1,$$

$$(4') \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{\delta - \delta^{-1}}{2},$$

$$(5') \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{2m}}{(2m)!} = \frac{\delta + \delta^{-1}}{2},$$

$$(6') \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m-1} D^{2m}}{(2m)!} = \frac{\delta^2 + \delta^{-2} - 2}{4},$$

$$(7') \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \Delta^m}{m} = D,$$

$$(8') \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r!}{m!} h_{m,r} \Delta^m = D^r,$$

$$(9_1') \quad \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(jD)^r}{r!} = (\delta^{m+1} - 1) \Delta^{-1} - 1,$$

$$(10_1') \quad \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+1)(jD)^r}{r!} = (m+1)\delta^{m+2} \cdot \Delta^{-2} - (m+2)\delta^{m+1} \cdot \Delta^{-2} + \Delta^{-2} - 1.$$

Nella (8')  $h_{m,r}$  sono i numeri di STIRLING di 1<sup>a</sup> specie. Se applichiamo i due membri delle eguaglianze simboliche (2'), (3<sub>1</sub>'), (4'), (5'), (6'), (7'), (8'), (9<sub>1</sub>'), (10<sub>1</sub>') alla funzione  $L_n^{(x)}(x)$ , polinomio di LA-GUERRE di grado  $n$  in  $x$  ed  $x$ , e se i simboli che compaiono in quelle uguaglianze li intendiamo riferiti alla variabile  $x$ , otteniamo rispettivamente

$$(2'') \quad \sum_{m=0}^n \frac{p^m}{m!} \frac{\partial^m L_n^{(x)}(x)}{\partial x^m} = L_n^{(x+p)}(x),$$

$$(3_1'') \quad \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^j \binom{m}{j} j^r \partial^r L_n^{(x)}(x)}{r!} = (-1)^m L_{n-m}^{(x+m)}(x) - L_n^{(x)}(x),$$

$$(4'') \quad \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{(2m+1)!} \frac{\partial^{2m+1} L_n^{(x)}(x)}{\partial x^{2m+1}} = \frac{1}{2} L_n^{(x+1)}(x) - \frac{1}{2} L_n^{(x-1)}(x),$$

$$(5'') \quad \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{1}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} L_n^{(x)}(x)}{\partial x^{2m}} = \frac{1}{2} L_n^{(x+1)}(x) + \frac{1}{2} L_n^{(x-1)}(x),$$

$$(6'') \quad \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2^{2m+1}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} L^{(x)}(x)}{\partial \alpha^{2m}} = L^{(x+2)}(x) + L^{(x-2)}(x) - 2L^{(x)}(x),$$

$$(7'') \quad \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1} L^{(x+m)}(x)}{m} = \frac{\partial L^{(x)}(x)}{\partial x},$$

$$(8'') \quad \sum_{m=0}^n \frac{r! h_{m,r}}{m} L^{(x+m)}(x) = \frac{\partial^r L^{(x)}(x)}{\partial \alpha^r},$$

$$(9'') \quad \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^n \frac{j^r}{r!} \frac{\partial^r L^{(x)}(x)}{\partial \alpha^r} = L^{(x+m)}_{n+1}(x) - L^{(x)}_{n+1}(x),$$

$$(10'') \quad \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^n \frac{(j+1)j^r}{r!} \frac{\partial^r L^{(x)}(x)}{\partial \alpha^r} = (m+1)L^{(x+m)}_{n+2}(x) - (m+2)L^{(x+m-1)}_{n+2}(x) + L^{(x-2)}_{n+2}(x) - L^{(x)}(x).$$

Per stabilire le precedenti si è tenuto presente che <sup>(1)</sup>

$$\partial^p L^{(x)}(x) = L^{(x+p)}(x), \text{ per } p \text{ intero relativo qualsiasi,}$$

$$\Delta^p L^{(x)}(x) = L^{(x+p)}_{n-p}(x) \quad \text{ » » » » » }$$

2. Dalla (2'') per  $p=1$  e dalle (3''), (9'') per  $m=1$ , tenendo presente per quest'ultime due che

$$(11) \quad L^{(x+1)}(x) - L^{(x)}(x) = L^{(x+1)}_{n-1}(x),$$

si ottiene

$$(12) \quad \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \frac{\partial^m L^{(x)}(x)}{\partial \alpha^m} = L^{(x+1)}(x).$$

<sup>(1)</sup> Cfr. la mia Nota precedente, su questo stesso Boll. e l'altro mio lavoro: *Sui polinomi di Legendre, di Laguerre, e di Hermite*, (Rend. Ist. Lombardo di Sc. e let. ». Vol. LXX, fasc. II, 1937), ponendo attenzione al significato leggermente diverso attribuito a  $\Delta$  in quest'ultima Nota, nella quale vi sono delle formule che presentano analogie con alcune qui stabilite.

Alla stessa (12) si perviene facendo nella (10<sub>1</sub>'')  $m=1$ , perchè è facile dimostrare, a mezzo della (11), che

$$L_{n+2}^{(x+1)} - \frac{3}{2} L_{n+2}^{(x)} + \frac{1}{2} L_{n+2}^{(x-2)} - \frac{1}{2} L_n^{(x)} = L_n^{(x+1)}.$$