
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SILVIO CINQUINI

Sopra alcune proprietà dei polinomi approssimativi

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 17 (1938), n.2, p. 84–90.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_84_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_84_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sopra alcune proprietà dei polinomi approssimativi (*).

Nota di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. - Si dimostrano in modo semplicissimo alcune proprietà dei polinomi di STIELTJES, recentemente stabilite da G. LORENZ. Si dà una nuova proprietà di tali polinomi, e si danno delle estensioni di tutti questi risultati, valide sia per i polinomi di STIELTJES, sia per altre classi di polinomi approssimativi.

In una Memoria: *Sopra alcuni polinomi approssimativi* ⁽¹⁾ L. TONELLI dimostrò che, se $f(x)$ è una funzione definita sull'intervallo $(0, 1)$ e ivi integrabile nel senso del LEBESGUE, il suo polinomio di STIELTJES di ordine n

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(z) [1 - (z - x)^2]^n dz,$$

dove è

$$\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt,$$

gode fra l'altro della seguente proprietà: « Se E è un insieme misurabile qualsiasi dell'intervallo $(0, 1)$, risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E P_n(x) dx = \int_E f(x) dx ».$$

Recentemente G. LORENZ ⁽²⁾ ha messo in luce una proprietà,

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽¹⁾ « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie II, Tomo XXV, (1916), pag. 275 e segg.

⁽²⁾ G. LORENZ, *Sur la convergence forte des polynomes de Stieltjes-Landau*. (« Recueil Mathématique », (Mosca), T. 1, (43), (1936), pp. 553-5). È da rilevare che, nel caso particolare $p=1$, la proprietà stabilita dal LORENZ trovasi in H. HAHN, *Ueber die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale*. (II Mitteilung). (« Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften » (Wien), Band 93, (1916), § 1, pag. 665).

per così dire, ancora più forte della precedente, provando che: Se p è un numero ≥ 1 , e se la $f(x)$ è integrabile in $(0, 1)$ insieme con la $|f(x)|^p$, vale l'uguaglianza

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x) - P_n(x)|^p dx = 0.$$

In ciò che segue mi propongo di mostrare che questa importante proprietà dei polinomi di STIELTJES può agevolmente dedursi da un'altra, che segue direttamente dai risultati già ottenuti dal TONELLI nel lavoro citato.

Pertanto comincio a provare che se $\Phi(u)$ è una funzione convessa secondo JENSEN e soddisfacente ad opportune ipotesi, gli integrali

$$\int \Phi(|P_n(x)|) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

sono equiassolutamente continui sull'intervallo $(0, 1)$. Poi, giovandomi di questo risultato, dimostro la proprietà stabilita dal LORENZ, e ne dò al tempo stesso una generalizzazione, dimostrando, in luogo della (1), l'uguaglianza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi(|f(x) - P_n(x)|) dx = 0.$$

Dò inoltre una nuova e semplicissima dimostrazione della disuguaglianza

$$\int_0^1 |P_n(x)|^p dx \leq \int_0^1 |f(x)|^p dx,$$

della quale si è giovato il LORENZ per stabilire la (1), e di cui ottengo la seguente generalizzazione

$$\int_0^1 \Phi(|P_n(x)|) dx \leq \int_0^1 \Phi(|f(x)|) dx.$$

Infine enuncio alcuni complementi ai precedenti risultati, relativi al caso in cui si considerino contemporaneamente più funzioni $f(x)$ e i loro polinomi di STIELTJES, e osservo che tutti i risultati della presente Nota sussistono anche per altre classi di polinomi, con un'opportuna avvertenza per i polinomi di FEJER in più variabili.

1. Una nuova proprietà dei polinomi di Stieltjes. — Sia $\Phi(u)$ una funzione finita per ogni u tale che sia $0 \leq u < +\infty$, non negativa e convessa secondo JENSEN.

Allora se $f(x)$ è una funzione definita sull'intervallo $(0, 1)$ e ivi integrabile (nel senso del LEBESGUE) insieme con $\Phi(|f(x)|)$, gli integrali

$$(2) \quad \int \Phi(|P(x)|) dx, \quad n=1, 2, \dots,$$

sono su $(0, 1)$ equiassolutamente continui ⁽¹⁾.

a) Supponiamo, inoltre, nel presente capoverso che la funzione $\Phi(u)$ sia non decrescente e che sia $\Phi(0) = 0$.

Definita la funzione $f(x)$ in tutto $(-\infty, +\infty)$, ponendola uguale a zero per ogni x esterno all'intervallo $(0, 1)$, abbiamo

$$P_n = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(z) [1 - (z-x)^2]^n dz = \frac{\int_{-x}^{1-x} f(x+t)(1-t^2)^n dt}{2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt} = \frac{\int_{-1}^1 f(x+t)(1-t^2)^n dt}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt}$$

e quindi, prendendo il valore assoluto e applicando la disuguaglianza di JENSEN, risulta

$$(3) \quad \Phi(|P_n(x)|) \leq \Phi \left(\frac{\int_{-1}^1 |f(x+t)|(1-t^2)^n dt}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt} \right) \leq \frac{\int_{-1}^1 \Phi(|f(x+t)|)(1-t^2)^n dt}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt} = T_n(x)$$

ove, tenendo conto dell'ipotesi supplementare $\Phi(0) = 0$, $T_n(x)$ è il polinomio di STIELTJES di ordine n della funzione $\Phi(|f(x)|)$.

Per una proprietà stabilita dal TONELLI gli integrali $\int T_n(x) dx$, ($n=1, 2, \dots$), sono equiassolutamente continui sull'intervallo $(0, 1)$, e, in virtù della (3), della stessa proprietà godono anche gli integrali (2). Il nostro asserto è con ciò provato, nell'ipotesi che $\Phi(u)$ sia non decrescente, e che sia $\Phi(0) = 0$.

b) Se queste ipotesi supplementari non sono verificate, osserviamo che, a prescindere dal caso banale, in cui $\Phi(u)$ sia limitata in tutto $(0, +\infty)$, nel qual caso il nostro teorema è evidente, il limite inferiore di $\Phi(u)$ si avrà per $u \rightarrow u_1$, con $0 \leq u_1 < \infty$, (ed esso sarà certamente un minimo se è $u_1 > 0$). In ogni caso, indicato con Φ^* tale limite inferiore, si definisca una funzione $\Phi_1(u)$, ponendo

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &= \Phi(u) - \Phi^*, & \text{per } u > u_1, \\ \Phi_1(u) &= 0, & \text{per } 0 \leq u \leq u_1. \end{aligned}$$

(3) Cioè, preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, è possibile determinare un $\delta > 0$, in modo che la disuguaglianza $\int_E \Phi(|P_n(x)|) dx < \varepsilon$, valga per tutti gli n e per tutti gli insiemi misurabili E , di misura minore di δ .

$\Phi_1(u)$ soddisfa alle stesse ipotesi di $\Phi(u)$, ed è inoltre non decrescente e nulla per $u = 0$.

Per quanto si è visto in *a*), dalla (3) si ha

$$\Phi_1(|P_n(x)|) \leq \frac{k_n}{2} \int_0^1 \Phi_1(|f(z)|) [1 - (z-x)^2]^n dz,$$

e quindi, essendo per ogni $u \geq 0$,

$$\Phi(u) - \Phi(0) \leq \Phi_1(u), \quad \Phi_1(u) \leq \Phi(u),$$

risulta

$$\Phi(|P_n(x)|) \leq \frac{k_n}{2} \int_0^1 \Phi(|f(z)|) [1 - (z-x)^2]^n dz + \Phi(0),$$

e si conclude in modo analogo ad *a*).

OSSERVAZIONE. — È da rilevare il notevole caso particolare del teorema del presente n.º che si ottiene per $\Phi(u) \equiv u^p$, ($p \geq 1$).

2. Generalizzazione del teorema di LORENZ. — Sia $\Phi(u)$ una funzione definita per $u \geq 0$, non negativa, convessa secondo JENSEN, e tale che sia $\Phi(0) = 0$.

Allora, se $f(x)$ è una funzione definita sull'intervallo $(0, 1)$ e ivi integrabile (nel senso del LEBESGUE) insieme con $\Phi(|f(x)|)$ e $\Phi(2|f(x)|)$, vale l'uguaglianza.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi(|f(x) - P_n(x)|) dx = 0.$$

Infatti, siccome quasi dappertutto in $(0, 1)$, è per $n \rightarrow \infty$, $P_n(x) \rightarrow f(x)$, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possiamo, per il n.º 1, determinare sull'intervallo $(0, 1)$ un insieme I , in modo che, indicato con E il suo complementare rispetto all'intervallo $(0, 1)$, sia

$$\int_E \Phi(2|P_n(x)|) dx < \varepsilon, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ed anche

$$\int_E \Phi(2|f(x)|) dx < \varepsilon,$$

e che, su I , $P_n(x)$ converga uniformemente a $f(x)$.

Per ogni n maggiore di un certo $\bar{n}$, risulta allora su I

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Siccome dalle ipotesi fatte su $\Phi(u)$, segue che tale funzione è

non decrescente, abbiamo tenendo anche presente che essa è convessa secondo JENSEN

$$\Phi(|f(x) - P_n(x)|) \leq \Phi(|f(x)| + |P_n(x)|) \leq \frac{1}{2} [\Phi(2|f(x)|) + \Phi(2|P_n(x)|)],$$

e quindi, per ogni $n > \bar{n}$, risulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(|f(x) - P_n(x)|) dx &\leq \int_I \Phi(|f(x) - P_n(x)|) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\int_E \Phi(2|f(x)|) dx + \int_E \Phi(2|P_n(x)|) dx \right] < \Phi(\varepsilon) + \varepsilon, \end{aligned}$$

e siccome $\Phi(\varepsilon) \rightarrow 0$, per $\varepsilon \rightarrow 0$, perchè per le ipotesi fatte $\Phi(u)$ risulta continua anche per $u=0$, il nostro asserto è con ciò provato.

OSSERVAZIONE. — Se esistono tre numeri non negativi A, B, C , tali che, per ogni $u \geq 0$, sia

$$(4) \quad \Phi(2u) \leq A\Phi(u) + Bu + C,$$

l'integrabilità, sull'intervallo $(0, 1)$, della funzione $\Phi(2|f(x)|)$ è una conseguenza delle altre ipotesi fatte nell'enunciato del presente n.º.

Per esempio, la disuguaglianza (4) è verificata per le seguenti funzioni

$$\Phi(u) \equiv u^p, \text{ con } p \geq 1; \quad \Phi(u) \equiv u \lg(1 + u^2), \text{ con } u > 0;$$

$$\Phi(u) \equiv u \lg[1 + \lg(1 + u)].$$

Il teorema di LORENZ è dunque un caso particolare di quello del presente n.º.

3. Generalizzazione di una proprietà stabilita da LORENZ. — Sia $\Phi(u)$ una funzione definita per ogni $u \geq 0$, non negativa, non decrescente e convessa secondo JENSEN.

Allora se $f(x)$ è una funzione definita sull'intervallo $(0, 1)$ ed ivi integrabile (nel senso del LEBESGUE) insieme con la $\Phi(|f(x)|)$, sussistono le disuguaglianze

$$(5) \quad \int_0^1 \Phi(|P_n(x)|) dx \leq \int_0^1 \Phi(|f(x)|) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

a) Supponiamo inoltre, nel presente capoverso, che sia $\Phi(0) = 0$. Definita anche qui la funzione $f(x)$ in tutto $(-\infty, +\infty)$, ponendola uguale a zero in tutti i punti esterni all'intervallo $(0, 1)$, abbiamo dalla (3), integrando rispetto ad x sull'intervallo $(0, 1)$

$$\int_0^1 \Phi(|P_n(x)|) dx \leq \frac{k_n}{2} \int_0^1 dx \int_{-1}^1 \Phi(|f(x+t)|) (1-t^2)^n dt.$$

e quindi anche, siccome il prodotto

$$\Phi(|f(x+t)|)(1-t^2)^n$$

è non negativo, in virtù del noto teorema di FUBINI-TONELLI sugli integrali multipli

$$(6) \quad \int_0^1 \Phi(|P_n(x)|) dx \leq \frac{k_n}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \int_0^1 \Phi(|f(x+t)|) dx.$$

Ma per ogni t di $(-1, 1)$ è

$$\int_0^1 \Phi(|f(x+t)|) dx \leq \int_0^1 \Phi(|f(x)|) dx,$$

e pertanto dalla (6) segue immediatamente la (5), la quale è così provata sotto l'ipotesi $\Phi(0) = 0$.

b) Se è $\Phi(0) \neq 0$, si consideri la funzione

$$\Phi_2(u) = \Phi(u) - \Phi(0).$$

Essa soddisfa a tutte le ipotesi del nostro teorema, ed è inoltre $\Phi_2(0) = 0$, quindi, per quanto abbiamo provato in a), risulta

$$\int_0^1 \Phi_2(|P_n(x)|) dx \leq \int_0^1 \Phi_2(|f(x)|) dx,$$

e ne segue immediatamente la (5).

4. Complementi. — I risultati ottenuti nei n.ⁱ precedenti si possono estendere al caso in cui si considerino contemporaneamente più funzioni $f(x)$ e i relativi polinomi di STIELTJES. Per semplicità di scrittura enunciamo tali estensioni nel caso in cui si considerino due funzioni.

α) Sia $\Phi(u, v)$ una funzione finita per ogni coppia u, v tale che sia $0 \leq u < +\infty$, $0 \leq v < +\infty$, non negativa e convessa secondo JENSEN.

Allora, se $f(x)$, $g(x)$ sono due funzioni definite sull'intervallo $(0, 1)$ ed ivi integrabili (nel senso del LEBESGUÉ) insieme con la $\Phi(|f(x)|, |g(x)|)$, indicati con $P_n(x)$, $Q_n(x)$ i polinomi di STIELTJES di ordine n relativi alla $f(x)$ e alla $g(x)$ rispettivamente, gli integrali

$$\int \Phi(|P_n(x)|, |Q_n(x)|) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

sono equiassolutamente continui sull'intervallo $(0, 1)$.

β) Se sono soddisfatte tutte le ipotesi indicate in α), se è inoltre $\Phi(0, 0) = 0$, e se sull'intervallo $(0, 1)$ è integrabile anche la funzione

$\Phi(2|f(x)|, 2|g(x)|)$, vale l'uguaglianza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi(|f(x) - P_n(x)|, |g(x) - Q_n(x)|) dx = 0.$$

γ) Se sono soddisfatte tutte le ipotesi indicate in α), e se inoltre la $\Phi(u, v)$ è, per ogni u , funzione non decrescente di v , e, per ogni v , funzione non decrescente di u , sussistono le disuguaglianze

$$\int_0^1 \Phi(|P_n(x)|, |Q_n(x)|) dx \leq \int_0^1 \Phi(|f(x)|, |g(x)|) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Basta ripetere le dimostrazioni dei n.° 1, 2, 3 con qualche evidente modificazione.

5. Estensioni ad altre classi di polinomi. — α) Tutti i risultati ottenuti nella presente Nota si estendono immediatamente ai polinomi di STIELTJES in più variabili, ai polinomi trigonometrici di DE LA VALLÉE POUSSIN in una o più variabili e ai polinomi trigonometrici di FEJÉR in una variabile.

β) I risultati dei n.° 1 e 3 (e così pure quelli dei n.° 4, α) e 4, γ) si estendono immediatamente anche ai polinomi di FEJÉR in più variabili.

Per l'estensione del risultato del n.° 2 (e così pure per quello del n.° 4, β) a quest'ultima classe di polinomi, bisogna tener presente il risultato recentemente ottenuto da B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ e A. ZYGMUND ⁽⁴⁾; e quindi nell'enunciato dell'analogo del teorema del n.° 2 (e analogamente in quello del n.° 4, β) va aggiunta l'ipotesi che sia integrabile (nel senso del LEBESGUE) anche il prodotto $f \lg^+ |f|$, (ove $\lg^+ |f| = \lg |f|$, per $|f| \geq 1$; $\lg^+ |f| = 0$, per $|f| \leq 1$), inquantochè questa ipotesi supplementare può non essere una conseguenza di quelle già fatte.

⁽⁴⁾ *Note on the differentiability of multiple integrale.* (« Fundamenta Mathematicae », T. XXV, (1935), pp. 217-234), § 6, pag. 230.