
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI AMERIO

**Trasformate di Laplace con infiniti
zeri tendenti all'infinito sul
semiasse reale positivo**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.2, p. 78-84.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_78_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_78_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_78_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Trasformate di Laplace con infiniti zeri tendenti all'infinito sul semiasse reale positivo (*).

Nota di LUIGI AMERIO (a Milano).

Sunto. - Tenendo conto di note formule sulle funzioni di BESSEL si danno esempi di trasformate di LAPLACE con infiniti zeri tendenti all'infinito sul semiasse reale positivo.

Si ricavano successivamente i valori asintotici di tali zeri e, in un caso particolare, i valori effettivi.

Mediante un cambiamento di variabile si ottiene poi da questo stesso caso un esempio di funzione integrabile e ortogonale in $0-1$ alla successione di potenze x^{m^2} con m intero positivo.

In una mia recente Nota ⁽¹⁾ ho dimostrato l'esistenza di funzioni reali le cui trasformate di LAPLACE possiedono infiniti zeri sull'asse reale, tendenti a $+\infty$, fatto di cui, a mio credere, non si conosceva alcun esempio, e che acquista interesse per le singolari proprietà, allora segnalate, che competono a tali funzioni.

In realtà si possono dare esempi in proposito trasformando opportunamente e completando nelle loro condizioni di validità note formule sulle funzioni di BESSEL. Ciò forma lo scopo della presente Nota, nella quale sono anche determinati, in generale, i valori asintotici di tali zeri e, in un caso, i valori effettivi.

1. Per $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ e v complesso qualunque vale la formula ⁽²⁾

$$(1) \quad K_{-v}(z) = K_v(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^v \int_0^\infty e^{-\tau} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau}}}{\tau^{v+1}} d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^v \int_0^\infty e^{-\tau} e^{-\frac{z^2}{4\tau}} \tau^{v-1} d\tau$$

dove $K_v(z)$ è la funzione cilindrica dell'argomento iz definita dalla relazione

$$K_v(z) = \frac{\pi}{2 \sin v\pi} (I_{-v}(z) - I_v(z))$$

ed è

$$I_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{v+2m}}{m! \Gamma(v+m+1)}.$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Matematico della R. Università di Milano.

(1) L. AMERIO, *Alcuni complementi alla teoria della trasformazione di Laplace*. (« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 1937, pagg. 205-213).

(2) G. H. WATSON, *Bessel Functions*, pag. 183, formula (15).

Se p è un numero reale positivo si ha allora, con la trasformazione $pt = \tau$,

$$(2) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\frac{z^2}{4t}} t^{\nu-1} dt = \frac{1}{p^{\nu}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-\frac{z^2 p}{4\tau}} \tau^{\nu-1} d\tau = \frac{2}{p^{\nu}} \left(\frac{z \sqrt{p}}{2} \right)^{\nu} K_{\nu}(z \sqrt{p})$$

dove per $\sqrt{p}$ si deve prendere il valore principale; lo stesso si farà per p^{ν} se, come supporremo, si sarà considerato il valore principale di t^{ν} e di z^{ν} .

La (2), per note proprietà della trasformazione di LAPLACE, vale nel semipiano $R(p) > 0$; si ha cioè

$$(3) \quad L\left(e^{-\frac{z^2}{4t}} t^{\nu-1}\right) = \frac{2}{p^{\nu}} \left(\frac{z \sqrt{p}}{2} \right)^{\nu} K_{\nu}(z \sqrt{p}).$$

Posto poi $\frac{z^2}{4} = \lambda$, (sicchè sarà $R(\lambda) > 0$), ne segue

$$(3') \quad L\left(e^{-\frac{\lambda}{t}} t^{\nu-1}\right) = \frac{2}{p^{\nu}} (\sqrt{\lambda p})^{\nu} K_{\nu}(2 \sqrt{\lambda p}) = 2 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{p}} \right)^{\nu} K_{\nu}(2 \sqrt{\lambda p})$$

dove per $\sqrt{\lambda}$ si prenderà il valore principale.

Osserviamo ora che per $R(\nu) > 0$ la funzione $e^{-\frac{\lambda}{t}} t^{\nu-1}$ è integrabile assolutamente, in ogni intervallo $0 < t \leq T$, anche se è $R(\lambda) = 0$. È facile dimostrare che anche in questo caso vale la (3').

Infatti, posto $\tau = \frac{1}{t}$, si ha, sempre per $R(p) > 0$, $R(\lambda) > 0$:

$$(4) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\frac{\lambda}{t}} t^{\nu-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{e^{-\frac{p}{\tau}}}{\tau^{\nu+1}} d\tau = 2 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{p}} \right)^{\nu} K_{\nu}(2 \sqrt{\lambda p})$$

cioè

$$(5) \quad L_{\lambda} \left(\frac{e^{-\frac{p}{\tau}}}{\tau^{\nu+1}} \right) = 2 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{p}} \right)^{\nu} K_{\nu}(2 \sqrt{\lambda p})$$

dove L_{λ} è simbolo di trasformazione di LAPLACE eseguita nel piano della variabile complessa λ .

D'altra parte, essendo $R(p) > 0$, l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{e^{-\frac{p}{\tau}}}{\tau^{\nu+1}} d\tau$$

converge anche per $R(\lambda) = 0$; perciò, per un noto teorema di PINCHERLE ⁽³⁾ (analogo a quello di ABEL sulle serie di potenze), la (5), e quindi la (3'), vale anche per $R(p) > 0$, $R(\lambda) \leq 0$, $R(\nu) > 0$.

(3) G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. (Berlin, Springer, 1937), S. 47, Satz 1.

Supposto $\lambda = i\alpha$, con $\alpha \geq 0$, si ricava allora

$$L\left(e^{-\frac{i\alpha}{t}} t^{\nu-1}\right) = 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}}\right)^{\nu} e^{i\nu \frac{\pi}{4}} K_{\nu}((1+i)\sqrt{2\alpha p})$$

e, per $\lambda = -i\alpha$, con $\alpha \geq 0$, si ha

$$L\left(e^{\frac{i\alpha}{t}} t^{\nu-1}\right) = 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}}\right)^{\nu} e^{-i\nu \frac{\pi}{4}} K_{\nu}((1-i)\sqrt{2\alpha p})$$

da cui, in definitiva,

$$(6) \quad L\left(t^{\nu-1} \cos \frac{\alpha}{t}\right) = \\ = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}}\right)^{\nu} \left[e^{-i\nu \frac{\pi}{4}} K_{\nu}((1-i)\sqrt{2\alpha p}) + e^{i\nu \frac{\pi}{4}} K_{\nu}((1+i)\sqrt{2\alpha p}) \right]$$

$$(7) \quad L\left(t^{\nu-1} \sin \frac{\alpha}{t}\right) = \\ = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}}\right)^{\nu} \left[e^{-i\nu \frac{\pi}{4}} K_{\nu}((1-i)\sqrt{2\alpha p}) - e^{i\nu \frac{\pi}{4}} K_{\nu}((1+i)\sqrt{2\alpha p}) \right]$$

che sono le trasformate di LAPLACE cercate.

2. Le formule ottenute si semplificano notevolmente quando sia $\nu = \frac{1}{2}$, oppure $\nu = n + \frac{1}{2}$ con n intero positivo.

Nel primo caso, ricordando che è ⁽⁴⁾

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

si ricava senza difficoltà

$$(8) \quad L\left(t^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\alpha}{t}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\sqrt{2\alpha p}} \cos \sqrt{2\alpha p}$$

$$(6) \quad L\left(t^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\alpha}{t}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\sqrt{2\alpha p}} \sin \sqrt{2\alpha p}$$

formule che, si osservi, possono essere facilmente ricavate da quella nota per $\lambda \geq 0$, ⁽⁵⁾

$$L\left(t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda}{t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{\lambda p}}$$

⁽⁴⁾ G. H. WATSON, loc. cit., pag. 80, formula (13).

⁽⁵⁾ G. DOETSCH, loc. cit., pag. 402, formula (18).

quando, come è stato fatto, se ne dimostri la validità per $R(\lambda) \geq 0$.

Nel caso in cui sia $\nu = n + \frac{1}{2}$, basta ricordare che è (*)

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_0^n \frac{(n+r)!}{r!(n-r)!(2z)^r}$$

da cui

$$\begin{aligned} (10) \quad & L\left(t^{n-\frac{1}{2}} \cos \frac{\alpha}{t}\right) = \\ & = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}}\right)^{n+\frac{1}{2}} \left[\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}} e^{i\frac{\pi}{8}} e^{-(1-i)\sqrt{2\alpha p}} \sum_0^n \frac{(n+r)!}{2^{2r} r!(n-r)!(\sqrt{\alpha p})^r} e^{ir\frac{\pi}{4}} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}} e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{-(1+i)\sqrt{2\alpha p}} \sum_0^n \frac{(n+r)!}{2^{2r} r!(n-r)!(\sqrt{\alpha p})^r} e^{-ir\frac{\pi}{4}} \right] = \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}}\right)^n e^{-\sqrt{2\alpha p}} \sum_0^n \frac{(n+r)!}{2^{2r} r!(n-r)!(\sqrt{\alpha p})^r} \cos\left(\sqrt{2\alpha p} - \frac{\pi}{4}(n-r)\right) \end{aligned}$$

è analogamente

$$\begin{aligned} (11) \quad & L\left(t^{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{\alpha}{t}\right) = \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}}\right)^n e^{-\sqrt{2\alpha p}} \sum_0^n \frac{(n+r)!}{2^{2r} r!(n-r)!(\sqrt{\alpha p})^r} \sin\left(\sqrt{2\alpha p} - \frac{\pi}{4}(n-r)\right) \end{aligned}$$

relazioni che si sarebbero anche potute ottenere derivando le (8) e (9), rispetto a p , n volte e moltiplicando per $(-1)^n$.

3. Le (8) e (9) ci danno immediatamente un primo esempio di trasformate di LAPLACE con infiniti zeri tendenti a $+\infty$ sul semiasse reale positivo: le funzioni ottenute si annullano infatti rispettivamente nei punti

$$(12) \quad p = \frac{\pi^2}{8\alpha} (2m+1)^2 \quad p = \frac{\pi^2}{2\alpha} m^2.$$

Supponiamo ora, in generale, $\nu > 0$. Per dimostrare anche in questo caso la proprietà osservata per $\nu = \frac{1}{2}$, ricorriamo all'espres-

(*) G. H. WATSON, loc. cit., pag. 80, formula (12).

sione asintotica di $K_\nu(z)$ ⁽⁷⁾, limitata al primo termine

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (1 + O(z^{-1}))$$

valida certamente per $\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$.

Dalla (6) si ha allora, supposto $p > 0$,

$$\begin{aligned} (13) \quad \int_0^\infty e^{-pt} t^{\nu-1} \cos \frac{\alpha}{t} dt &= 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}} \right)^\nu \Re \left[e^{-i\nu \frac{\pi}{4}} K_\nu((1-i) \sqrt{2xp}) \right] = \\ &= 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}} \right)^\nu \Re \left[\frac{e^{-i\nu \frac{\pi}{4}}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{xp}}} e^{i\frac{\pi}{8}} e^{-(1-i)\sqrt{2xp}} \left(1 + O(p^{-\frac{1}{2}}) \right) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{2xp}} \cos \left(\sqrt{2xp} - \frac{\pi}{4} \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \right) \left(1 + O(p^{-\frac{1}{2}}) \right) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} (14) \quad \int_0^\infty e^{-pt} t^{\nu-1} \sin \frac{\alpha}{t} dt &= \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{p}} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{2xp}} \sin \left(\sqrt{2xp} - \frac{\pi}{4} \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \right) \left(1 + O(p^{-\frac{1}{2}}) \right). \end{aligned}$$

Da queste formule e da quelle analoghe che potrebbero ricavarsi per le derivate dei secondi membri delle (13) e (14), (derivate che coincidono con le trasformate di $-t^\nu \cos \frac{\alpha}{t}$ e $-t^\nu \sin \frac{\alpha}{t}$), risulta, in modo ben noto, che esistono infiniti zeri sul semiasse reale positivo, tendenti a $+\infty$ e dati asintoticamente da

$$(15) \quad p = \frac{\left[(2m+1) \frac{\pi}{2} + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4} \right]^2}{2x}$$

$$(16) \quad p = \frac{\left[m\pi + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4} \right]^2}{2x}.$$

OSSERVAZIONI. — I) La funzione

$$t^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\alpha}{t}$$

⁽⁷⁾ G. H. WATSON, loc. cit., pag. 202, formula (1).

è assolutamente integrabile tra 0 e $+\infty$, perchè, per $t \rightarrow \infty$, $t^{-1/2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{t}$ è infinitesimo dello stesso ordine di $t^{-3/2}$. Col cambiamento di variabile $x = e^{-t}$ si ha allora

$$(17) \quad \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{t} dt = - \int_0^1 x^{-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{\log x} \right) dx:$$

cioè la funzione

$$x^{-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{\log x} \right)$$

è integrabile tra 0 e 1. Si ha poi, per $\Re(p) \geq 0$,

$$(18) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{t} dt = - \int_0^1 x^p \left[x^{-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{\log x} \right) \right] dx$$

e quindi, dato ad α il valore $\frac{\pi^2}{2}$, dalla seconda delle (12) scende che la funzione

$$(19) \quad f(x) = x^{-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi^2}{2 \log x} \right)$$

è ortogonale, in $0 \leq x \leq 1$, alla successione di potenze x^{m^2} , con $m = 1, 2, \dots$, cioè si ha

$$\int_0^1 x^{m^2} f(x) dx = 0.$$

L'esistenza di tale funzione non può sorprendere; essa è anzi prevista da un noto teorema di MÜNTZ ⁽⁸⁾, in quanto la $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ è convergente. È notevole però che ci sia stato possibile costruirne una combinando in modo assai semplice operatori elementari dell'Analisi.

II) Con riferimento a quanto è detto in fine della mia Nota citata, si può anche rilevare una proprietà comune a tutte le funzioni $t^{\nu-1} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{t}$, $t^{\nu-1} \cos \frac{\alpha}{t}$, con $\nu > 0$: che cioè il prodotto integrale

⁽⁸⁾ CH. H. MÜNTZ, *Ueber den Approximationsatz von Weierstrass*. (* Math. Abhandl. H. A. Schwarz gewidmet, 1914, pp. 303-312).

(Faltung) di una di esse per una qualunque funzione definita in $0 \leq t \leq T$, ivi integrabile secondo LEBESGUE e non quasi ovunque nulla in un intorno dello zero per quanto piccolo, assume in ogni tale intorno valori positivi e negativi.