
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANTIŠEK VYČICHLO

Interpretazione geometrica della curvatura proiettiva delle curve piane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 17 (1938), n.2, p. 75–77.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_75_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_75_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

Interpretazione geometrica della curvatura proiettiva delle curve piane.

Nota di FRANTIŠEK VYČIHLŮ (a Praga).

Sunto. - La curvatura proiettiva di una curva piana in punto generico si può esprimere mediante il birapporto di certe quattro rette che escono da questo punto.

In questa Nota mostreremo una semplice interpretazione della curvatura proiettiva $q(s)$ ⁽¹⁾ che interviene nelle equazioni fondamentali differenziali per la curva piana C ⁽²⁾:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{ds^2} + 2q \frac{dx}{ds} + \left(\frac{dq}{ds} - 1\right)x = 0, \quad \frac{d^2\xi}{ds^2} + 2q \frac{d\xi}{ds} + \left(\frac{dq}{ds} + 1\right)\xi = 0,$$

ove s è l'arco proiettivo e x, ξ sono le coordinate di punto e di retta tangente, normalizzate secondo E. CECH. Per la dimostrazione faremo uso di qualche teorema ben noto relativo al contatto delle curve in un punto generico od in un punto singolare pel caso di una curva algebrica od infine pel contatto delle curve di cui una è data mediante le forme plückeriane ⁽³⁾.

Siano

$$(2) \quad A_0\left(-\frac{d\xi}{ds}\right), \quad A_1(\xi), \quad A_2\left(\frac{d^2\xi}{ds^2} + q\xi\right),$$

⁽¹⁾ Ved. anche la nota di E. PICASSO: *Curvatura di una linea piana*. « Rend. del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari », 1934; ed anche la mia nota: *Sur une interprétation géométrique de la courbure projective des courbes planes*, « Bulletin de la Société Math. de France », 64 (1936), pag. 87-98.

⁽²⁾ Ved. FUBINI-CECH, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris, 1931 (Gauthier-Villars), pag. 13.

⁽³⁾ Ved. E. CECH, *Projektioni Differ. Geometrie*, Praga, 1926, pag. 111-120. Nel seguito noi lo designeremo per brevità con « P.D.G. ».

le rette fondamentali del sistema locale delle coordinate di PLÜCKER rispetto al punto $s = s_0$ della curva C e

$$(3) \quad I\left(+\frac{d^2\xi}{ds^2} - \frac{d\xi}{ds} + (q+1)\xi\right),$$

la retta unità. Adoperando questo sistema (x_0, x_1, x_2) dimostreremo che:

1. Il fascio delle cubiche che hanno nel punto $s = s_0$ con la curva C contatto di ordine 7, è quello determinato dalle cubiche:

$$(4) \quad \begin{cases} {}^1C \equiv 10x_0x_1x_2 - 5x_0^3 - 4x_1^3 = 0, \\ {}^2C \equiv 5(2x_1x_2 - x_0^2)(7x_2 + qx_1) - 14x_0x_1^2 = 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. — a) La conica osculatrice nel punto $s = s_0$ alla C è

$$(5) \quad 2x_1x_2 - x_0^2 = 0.$$

Infatti la forma che appartiene a questa conica in coordinate di PLÜCKER è

$$(6) \quad {}^1P(\xi) = 2(\xi\xi_{ss} + q\xi^2) - \xi_s^2 \quad (4).$$

Segue per derivazione:

$$(7) \quad {}^1P_s = 2(\xi\xi_{sss} + q_s\xi^2 + 2q\xi\xi_s).$$

Poichè

$$(8) \quad ({}^1P_s)_{s=s_0} = (-2\xi_s^2)_{s=s_0},$$

possiamo dire che la forma ${}^1P_s(\xi)$ ha nel punto $s = s_0$ con la curva C contatto quattropunto ⁽⁵⁾. Ora ${}^1P(\xi)$ ha con C nel punto $s = s_0$ contatto cinquepunto ⁽⁶⁾. La conica è osculatrice.

b) Poichè la forma ${}^2P(\xi)$ appartenente alla 1C è

$$(9) \quad {}^2P(\xi) = -5{}^1P\xi_s - 4\xi_s^2,$$

abbiamo

$$(10) \quad ({}^2P_s)_{s=s_0} = (-5{}^1P\xi_{ss} - 2\xi_s^2\xi_s)_{s=s_0},$$

e

$$(11) \quad ({}^2P_{ss})_{s=s_0} = [{}^1P(4\xi - 5\xi_{ss}) - 8q\xi_s^2]_{s=s_0}.$$

Vediamo che ${}^2P_{ss}(\xi)$ ha con C nel punto $s = s_0$ contatto del 5° ordine ⁽⁷⁾. Per questa ragione la forma ${}^2P_s(\xi)$ ha con C nel punto s_0 contatto di ordine 6 e la forma ${}^2P(\xi)$ ha contatto di or-

(4) Qui e nel seguito l'indice in basso significa derivazione rispetto all'arco proiettivo.

(5) Ved. « P. D. G. », pag. 111.

(6) Ved. « P. D. G. », pag. 120.

(7) Ved. « P. D. G. », pag. 111.

dine 7. Allora la cubica 1C ha nel punto $s=s_0$ con la curva C contatto di ordine 7 ⁽⁸⁾.

c) La forma di PLÜCKER appartenente alla cubica 2C è

$$(12) \quad {}^2P(\xi) = 5{}^1P \cdot (7\xi_{xx} + 8q\xi) + 14\xi^2\xi_x.$$

Derivando, nel punto considerato abbiamo:

$$(13) \quad ({}^2P_s)_{s=s_0} = [6{}^2Pq + {}^1P \cdot \xi(5q_x - 63)]_{s=s_0},$$

da cui segue subito che la forma ${}^2P(\xi)$ ha con la curva C nel punto $s=s_0$ contatto di ordine 6. Allora la ${}^2P(\xi)$ ha ivi contatto di ordine 7 cioè la cubica 2C ha con la C in $s=s_0$ contatto di ordine 7 come la cubica 1C .

2. La curvatura proiettiva $q(s)$ della curva piana C nel punto $s=s_0$ soddisfa alla relazione

$$(14) \quad q(s_0) = \frac{14}{3\sqrt{100}} (TNHI) \text{ } ^{(9)},$$

cioè è uguale, a meno di un fattore costante $\left(\frac{14}{3\sqrt{100}}\right)$, al birapporto $(TNHI)$, dove T è la tangente, N la normale proiettiva nel punto $s=s_0$, H la retta che congiunge il punto $s=s_0$ al punto di HALPHEN del fascio delle cubiche 1C , 2C (che hanno nel punto $s=s_0$ contatto di ordine 7 con C) ed infine I è la retta proiettante dal punto $s=s_0$ il punto di flesso reale della cubica 1C (cubica con nodo nel punto $s=s_0$, toccata ivi dalla tangente e dalla normale proiettiva di C).

DIMOSTRAZIONE. — La tangente T nel sistema considerato è $x_1=0$, la normale proiettiva $x_0=0$. Per la retta H proiettante da $s=s_0$ l'altro punto comune alle cubiche 1C , 2C otterremo dalle (4)

$$(15) \quad 5qx_0 + 14x_1 = 0,$$

ed infine per la retta I dalla prima equazione (4) viene

$$(16) \quad x_0 + x_1 \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 0.$$

Si ha poi subito

$$(17) \quad (TNHI) = \left(\infty, 0, \frac{14}{5q}, \sqrt[3]{\frac{4}{5}} \right) = \frac{\sqrt[3]{100}}{14} q,$$

e quindi l'equazione (14).

⁽⁸⁾ Ved. « P.D.G. », pag. 118.

⁽⁹⁾ Per la radice $\sqrt[3]{-}$ si prende il valore aritmetico.