
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO FUBINI

Una lezione sulla riduzione di un
differenziale ellittico reale a forma
canonica con una trasformazione
reale

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 17 (1938), n.2, p. 65–75.*

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_65_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_65_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_65_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

PICCOLE NOTE

Una lezione sulla riduzione di un differenziale ellittico reale a forma canonica con una trasformazione reale.

Nota di GUIDO FUBINI (a Torino).

Sunto. - Il titolo dice l'argomento di questa lezione. L'A. crede di aver dato metodi più semplici e spontanei di quelli contenuti nei trattati a lui noti, e di averli illustrati con semplici costruzioni grafiche.

Consideriamo un integrale ellittico *reale* $dw: \sqrt{P(w)}$ di prima specie. Allora $P(w)$ sarà un polinomio *reale* di 3° o di 4° grado privo di radici multiple. Nel secondo caso l'equazione $P(w)=0$ avrà *quattro* radici; nel primo caso potremo ancora parlare delle *quattro* radici della $P(w)=0$, convenendo di considerare $w=\infty$ come una radice *reale* della equazione $P(w)=0$ di 3° grado. Ciò appare spontaneo a chi pensi che invece delle radici di $P(w)=0$ si può in questi studi parlare dei punti di diramazione di $\sqrt{P(w)}$.

Dal punto di vista *reale* tali differenziali si potranno, in ogni caso, distinguere in *tre tipi*:

1° tipo). Le radici citate sono tutte e quattro reali.

2° tipo). Le radici sono due reali, due complesse coniugate.

3° tipo). Le radici sono due coppie di numeri complessi coniugati. [Questo caso non si presenta se $P(w)$ è di terzo grado].

Il problema di cui ci occupiamo è di ridurre con una trasformazione *reale* ⁽¹⁾ tali differenziali alla forma canonica di LEGENDRE

$$(1) \quad dv = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1).$$

Ora è notevole che, con una trasformazione *reale*, si può fare assumere ad (1) la forma di un integrale ellittico di 1^a specie di

⁽¹⁾ Questo problema, di scarsa importanza teorica, è fondamentale per chi debba eseguire calcoli numerici.

un tipo qualsiasi. Infatti, posto, rispettivamente $x = \sin \varphi$, $X = \cos \varphi$, $\xi = a \operatorname{tg} \varphi$ (con $a = \operatorname{cost.}$), si trova immediatamente

$$(2) \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = - \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(k'^2+k^2X^2)}} = \\ = a \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2+a^2)(k'^2\xi^2+a^2)}}, \quad (0 < k' < 1; k^2+k'^2=1).$$

Il secondo, il terzo, il quarto membro di (2) sono precisamente differenziali del 1°, del 2°, del 3° tipo.

Si noti ancora che, supposto, come al solito, che $v=0$ per $\varphi=0$, cioè posto $\varphi = amv$, alle formole (2) si può giungere anche supponendo

$$x = snv, \quad X = cnv, \quad \xi = a \frac{snv}{cnv},$$

e studiando le equazioni differenziali del 1° ordine, a cui soddisfano queste funzioni.

Si passa dall'una all'altra delle (2) con le trasformazioni:

$$X = \sqrt{1-x^2}, \quad \xi = a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ ecc.}$$

trasformazioni che sono reali, perchè $|x| \leq 1$, $|X| \leq 1$.

Ad abundantiam si possono ricordare altre semplici trasformazioni.

Ponendo, p. es., $x_1 = dnv = \sqrt{1-k^2x^2}$, $x_2 = 1:x_1$, $X_1 = 1:X$, si trova:

$$(2_{bis}) \quad dv = - \frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(x_1^2-k'^2)}} = - \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2^2-1)(x_2^2-k^2)}} \\ (|x_2| \geq 1; k' < |x_1| < 1)$$

oppure

$$(2_{ter}) \quad dv = \frac{dX_1}{\sqrt{(X_1^2-1)(k'^2X_1^2+k^2)}}, \quad (|X_1| \geq 1).$$

I differenziali (2_{bis}) sono ancora del tipo 1°, come il primo dei differenziali (2). Ma nel primo dei (2_{bis}) il polinomio denominatore ha *negativo* il coefficiente della quarta potenza della variabile x_1 . Così (2_{ter}) è del tipo secondo, precisamente come il secondo dei differenziali (2): unica differenza tra di loro è il segno del coefficiente di X^4 o di X_1^4 .

È importante osservare che, posto

$$x^2 = t, \quad X^2 = T, \quad \xi^2 = \tau, \quad x_1^2 = t_1, \quad x_2^2 = t_2, \quad X_1^2 = T_1,$$

i precedenti differenziali diventano:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} dv &= \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}} = -\frac{1}{2} \frac{dT}{\sqrt{T(1-T)(k'^2+k^2T)}} = \\ &= \frac{1}{2} a \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau+a^2)(k'^2\tau+a^2)}} = -\frac{1}{2} \frac{dt_1}{\sqrt{t_1(1-t_1)(t_1-k'^2)}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{dt_2}{\sqrt{t_2(t_2-1)(t_2-k^2)}} = \frac{1}{2} \frac{dT_1}{\sqrt{T_1(T_1-1)(k'^2T+k^2)}}, \end{aligned} \right.$$

ove il polinomio al denominatore è *sempre* di terzo grado, e i differenziali sono *tutti* del *primo* tipo (cioè con punti di diramazione *tutti reali*, di cui solo tre a distanza finita).

Il modo più semplice di ridurre un integrale ellittico $dw: \sqrt{P(w)}$ a forma canonica è quello di far subire a w una trasformazione reale lineare tale che le quattro radici della $P(w)=0$ vadano nelle quattro radici di uno dei polinomi che sono al denominatore di uno dei differenziali (2) o (3). È però interessante studiare particolarmente i tre tipi citati.

1° TIPO. — I quattro punti di diramazione sono quattro punti reali $w=\alpha_i$. Assumiamo una retta r come immagine della variabile w ; e, come in geometria proiettiva, consideriamola *chiusa* all'infinito. Allora due valori distinti $w=\beta, \gamma$ divideranno r in *due* intervalli. Se uno dei punti β, γ , p. es. il punto $w=\gamma$, è all'infinito, allora tali intervalli saranno le due semirette in cui, secondo la geometria elementare, la retta r sarebbe divisa dal punto $w=\beta$. Se entrambi i punti β, γ sono al finito, uno dei due intervalli è il segmento finito, di cui β, γ sono gli estremi, l'altro è la parte residua di r , e, secondo la geometria elementare, sarebbe formato da due semirette (che si congiungono all'infinito).

I quattro punti di diramazione citati dividono la retta in *quattro* intervalli (due di essi sono semirette se $P(w)$ è di terzo grado e un punto di diramazione è all'infinito; se così non avviene, tre intervalli sono segmenti finiti, il quarto appare al geometra elementare come composto di due semirette). In due e due soli (non contigui) di questi intervalli è $P(w) > 0$, e quindi $\sqrt{P(w)}$ è reale. Sia j quello di questi due intervalli, in cui noi consideriamo variabile w . Indicheremo con α_1 e α_2 i due estremi di j (lasciando arbitrario quale si indica con α_1 , quale con α_2). Percorriamo r nel verso che, attraverso l'intervallo j , conduce da α_1 ad α_2 ; e supponiamo di incontrare i punti di diramazione nell'ordine $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1$.

I punti α_3, α_4 saranno *esterni* ad j : [scambiando gli estremi che si indicano con α_1 ed α_2 , si scambieranno i punti α_3, α_4]. Se w è un punto di j , il verso $\alpha_1 w \alpha_2$ coinciderà col verso $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, o col verso $\alpha_3 \alpha_2 \alpha_4$, o col verso $\alpha_3 \alpha_4 \alpha_1$, o col verso $\alpha_4 \alpha_1 \alpha_2$.

Portiamo con una trasformazione lineare *reale* (generalmente fratta) i punti $w = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nei punti $x = -1, 1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$; ai punti w dell'intervallo j corrisponderanno i punti x soddisfacenti alla $|x| \leq 1$. I punti $\pm(1:k)$ che sono immagine di punti *esterni* ad j saranno *esterni* all'intervallo $|x| \leq 1$; e quindi sarà $|k| < 1$. Poichè i versi $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ed $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ coincidono, i versi $(-1, 1, \frac{1}{k})$ ed $(1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$ (sull'asse delle x pensato chiuso all'infinito) coincideranno; perciò sarà $k > 0$, e quindi $0 < k < 1$.

Il valore di k si trova uguagliando i birapporti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ e $(-1, 1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$:

$$\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_1} = \frac{\frac{1}{k} + 1}{\frac{1}{k} - 1} \frac{-\frac{1}{k} - 1}{-\frac{1}{k} + 1} = \left(\frac{\frac{1}{k} + 1}{\frac{1}{k} - 1} \right)^2.$$

Per le ipotesi fatte il primo membro è *maggiore* di 1. Se R ne è la radice quadrata positiva, la $R = \left(\frac{1}{k} + 1\right) : \left(\frac{1}{k} - 1\right)$ determina completamente il numero

$$(4) \quad k = \frac{R - 1}{R + 1} \quad (\text{è } 0 < k < 1, \text{ perchè } R > 1).$$

Il differenziale $dw : \sqrt{P(w)}$, quando w si muove in j , coinciderà (a meno di un fattore costante *reale*) con

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

cioè col primo dei differenziali (1). La riduzione a forma canonica con una trasformazione *reale* è quindi conseguita nel modo più semplice.

1° TIPO (2° metodo). — Si potrebbero portare (ancora con una trasformazione lineare, generalmente fratta) i punti $w = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nei punti $z = 0, 1, A, \infty$, ove A è determinato dall'uguagliare i birapporti

$$(5) \quad \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_1} = \frac{A}{A-1}, \quad \text{cioè } R^2 = \frac{A}{A-1}, \quad A = \frac{R^2}{R^2-1}.$$

Essendo, come già abbiamo osservato, $R^2 > 1$, sarà anche $A > 1$. Ciò che si poteva prevedere osservando che il verso $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ coincide col verso $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ e che quindi il verso $(0, 1, A)$ coincide col verso $(1, A, \infty)$.

Quando w varia in j , allora $0 < z < 1$, e $dw: \sqrt{P(w)}$, a meno di un fattore costante reale, coinciderà con

$$\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}, \quad \left(k^2 = \frac{1}{A} = \frac{R^2-1}{R^2}\right).$$

Si noti che il valore attuale k^2 dato da (5) *non* coincide col valore (4), utile col metodo precedente. Ora il differenziale testè determinato si riduce facilmente a qualcuno dei (3), p. es. al primo di essi (basta porre $t=z$, e trascurare il fattore inessenziale $\frac{1}{2}$). Il confronto del metodo attuale col precedente conduce senz'altro alla trasformazione di LANDEN. Infatti consideriamo il primo dei differenziali (2), quando si supponga che $-1 \leq x \leq 1$. Poniamo

$$(6) \quad x = \frac{-2z + k + 1}{2kz - (k+1)}.$$

Ai valori

$$z = 0, 1, A = \frac{(k+1)^2}{4k}, \infty \quad (A > 1)$$

corrisponderanno precisamente i punti $x = -1, 1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$. E si avrà, posto $z = t^2$, $A = 1:k^2$:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{1+k} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = \frac{2}{1+k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Per $t=0$ è $x=-1$. Dunque, integrando, si avrà:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{2}{1+k} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Ponendo i due membri uguali a v , e ricordando che con le notazioni abituali è

$$K = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

si trova

$$(7) \quad \begin{cases} t = \operatorname{sn} \left(\frac{1+k}{2} v, \bar{k} \right) = \operatorname{sn} \left(\frac{1+k}{2} v, \frac{2\sqrt{k}}{k+1} \right), \\ x = \operatorname{sn} (v - K, k) = -\frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)}. \end{cases}$$

Le due funzioni (7) sono legate dalla (6) ove si ponga $z = t^2$. E si ritrova così la trasformazione di LANDEN.

2° TIPO. — L'equazione $P(w) = 0$ abbia due radici reali α, β e due complesse $\gamma \pm i\delta$. Nel piano π della variabile complessa w i punti $\alpha, \beta, \gamma + i\delta$ determinano un cerchio C (ridotto ad una retta se uno dei punti α, β è il punto $w = \infty$). È facile riconoscere che le trasformazioni lineari reali che mutano in sé stessi i punti α, β trasformano il cerchio C in sé stesso, pure non lasciando fisso il punto $\gamma + i\delta$. Consideriamo una trasformazione lineare reale T che porta i punti $w = \alpha, \beta$ nei punti $X = \pm 1$. Essa porterà C in un cerchio Γ passante per i punti $X = \pm 1$; e dall'osservazione precedente segue che il cerchio Γ non muta, se cambiamo la trasformazione T che porta i punti $w = \alpha, \beta$ rispettivamente nei punti $X = -1, +1$. Al variare di questa trasformazione il punto Q trasformato di $\gamma + i\delta$ descriverà tutto il cerchio Γ , e si potrà perciò scegliere T in modo che il punto Q trasformato di $\gamma + i\delta$ sia uno dei punti in cui il cerchio Γ incontra l'asse immaginario (del piano della variabile complessa X). Se uno di questi punti ha l'ordinata a , l'altro avrà l'ordinata $(-1/a)$. Supponiamo che Q sia il punto di ordinata a . Allora la trasformazione T trasformerà il differenziale $(dw : \sqrt{P(w)})$ in un differenziale che, a meno di un fattore costante reale, coinciderà con

$$\frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(X^2+a^2)}} \quad \text{o con} \quad \frac{dX}{\sqrt{(X^2-1)(X^2+a^2)}}.$$

A meno di un fattore costante reale, il primo di questi coincide col secondo dei (2), quando si ponga $1/a^2 = k^2 : k'^2 = k^2 : (1-k^2)$, ossia

$$k^2 = \frac{1}{a^2 + 1}, \quad (0 < k^2 < 1).$$

Il secondo dei precedenti differenziali coincide (a meno di un fattore costante reale) con (2_{ter}), appena si ponga X_1 al posto di X , e $k^1 : k'^1 = k^2 : (1-k^2)$ al posto di a^2 .

COSTRUZIONE GRAFICA. — Il valore di a^2 e quindi anche quello di k^2 si possono trovare graficamente. Il cerchio C è il cerchio circoscritto al triangolo che ha per vertici i punti $\alpha, \beta, \gamma + i\delta$. Per trovare il cerchio Γ basterà vedere quale è il cerchio Γ trasformato di C mediante una delle trasformazioni lineari citate. La più semplice di questa è la similitudine che porta i punti $w = \alpha, \beta$ nei punti $X = -1, +1$. L'asse immaginario del piano X è l'asse del segmento $(-1, 1)$, cioè la retta perpendicolare a questo segmento

che passa per il suo punto di mezzo. I punti ia , $(-i; a)$, in cui Γ incontra l'asse immaginario sono pertanto i punti che insieme ai punti ± 1 determinano un triangolo simile ad uno dei triangoli che hanno per vertici i punti α, β ed uno dei punti ove l'asse del segmento (α, β) incontra il cerchio C . [Non ci occupiamo del caso che O sia ridotto ad una retta, cioè che $P(w)$ sia di terzo grado e quindi che uno dei punti α, β sia all'infinito].

3° TIPO. — $P(w)=0$ ha due coppie di radici complesse coniugate. Nel piano della variabile complessa w a queste radici corrispondono quattro punti, a due a due simmetrici rispetto all'asse reale. Questi quattro punti giaceranno perciò sopra un cerchio C che incontrerà l'asse reale in due punti reali α, β . Con una trasformazione lineare intera reale $\xi = h \frac{w-\alpha}{w-\beta}$, (ove h è una costante reale arbitraria) si portino i punti $w = \alpha, \beta$ nei punti $\xi = 0, \infty$. Il cerchio C sarà trasformato nell'asse immaginario del piano della variabile complessa ξ ; le quattro radici della $P(w)=0$, giacenti su C , saranno trasformate in quattro punti $\xi = \pm im, \pm in$ di tale asse immaginario: le m, n saranno reali, e, volendo, si potranno supporre positive. Il differenziale $dw: \sqrt{P(w)}$ coinciderà, a meno di un fattore costante reale, con

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 + m^2)(\xi^2 + n^2)}}.$$

Siamo ricondotti (a meno del solito fattore costante reale) all'ultimo dei differenziali (2), ove, se $|m|$ è il più piccolo dei numeri $|m|, |n|$, sia posto

$$a = |m|, \quad k^2 = 1 - k^2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

COSTRUZIONE GRAFICA. — La ricerca dei punti im, in si può compiere per via grafica.

Si consideri uno dei semipiani, in cui l'asse reale divide il piano π della variabile complessa w , p. es. il semipiano superiore. Si considerino le due radici della $P(w)=0$ che giacciono in questo semipiano, e si proiettino tali radici da uno dei punti α, β sull'asse immaginario. Le ordinate di queste proiezioni daranno una possibile coppia di valori per i numeri m, n (le altre ∞^1 coppie possibili si ottengono, moltiplicando m, n per una stessa costante reale e positiva). La dimostrazione di quanto si è asserito è immediata. I punti α, β e le due radici considerate sono quattro punti di uno stesso cerchio C (che incontra l'asse reale ad angolo retto). I quattro

valori corrispondenti della variabile complessa w hanno per birapporto proprio il birapporto dei quattro punti citati del cerchio C , cioè il birapporto delle quattro rette che proiettano tali punti da un punto qualsiasi del cerchio C , p. es. dal punto β , od anche dei quattro punti in cui queste quattro rette incontrano l'asse immaginario. Ma di questi quattro punti, quelli che corrispondono ad α ed a β sono evidentemente l'origine e il punto improprio. Gli altri due saranno perciò due possibili punti *im*, *in*.

OSSERVAZIONI. — 1. Come nel primo tipo abbiamo trovato la trasformazione di LANDEN variando il metodo di riduzione a forma canonica, così, variando la forma canonica tra le (2), (2_{bis}), (2_{ter}), troveremmo altre formole di trasformazione che però non portano a nulla di essenzialmente nuovo.

2. Ci si potrebbe proporre il problema analogo per la riduzione con trasformazioni *reali* alla forma canonica di WEIERSTRASS. Noi qui ci accontenteremo di ridurre invece anche la forma canonica di WEIERSTRASS

$$\frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}} = \frac{dp}{\sqrt{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}}$$

alla forma canonica di LEGENDRE, cioè ad una delle forme (2), (2_{bis}), (2_{ter}), (3). Si tratta di un'applicazione immediata dei metodi precedenti; al lettore il confronto tra le varie forme qui ottenute e quelle di altri trattati, che si potrebbero dedurre appunto variando il differenziale (2), (2_{bis}), (2_{ter}) o (3) che si assume come canonico.

I). Le radici e_i sono reali ed è $e_1 > e_2 > e_3$. Supponiamo $e_2 > p > e_3$; e poniamo

$$S = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}, \quad (0 < S < 1);$$

$$k = \frac{1-S}{1+S} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2}}, \quad (0 < k < 1).$$

La trasformazione lineare

$$(z) \quad \frac{p - e_2}{p - e_3} = S \frac{z - 1}{z + 1},$$

porta i punti $p = e_1, e_2, e_3, \infty$ nei punti $z = \frac{1}{k}, 1, -1, -\frac{1}{k}$, e l'intervallo $e_2 > p > e_3$ nell'intervallo $1 > z > -1$; essa porta il

citato differenziale di WEIERSTRASS $dp: \sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}$ in

$$(\beta) \quad \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}},$$

$$(e_2 > p > e_3).$$

Integriamo, osservando che per $p = \infty$ è $z = -\frac{1}{k}$ e ricordando che

$$\int_{-\frac{1}{k}}^0 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = K - iK'.$$

Troveremo

$$u = \int_{\infty}^p \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}} \left[\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + K - iK' \right]$$

ossia

$$z = \operatorname{sn} \{ (\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}) u + K + iK' \}.$$

La z , si noti, è legata alla p mediante la (α).

II). Sempre nella ipotesi di radici e reali e di $e_1 > e_2 > e_3$, il radicale $\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}$ è reale anche se $p > e_1$ (cioè se p appartiene all'intervallo $[e_1, \infty)$). La trasformazione lineare

$$(\alpha') \quad p = e_1 - S(e_1 - e_3) \frac{z + 1}{z - 1}, \quad \text{ossia} \quad z = \frac{p - e_1 - S(e_1 - e_3)}{p - e_1 + S(e_1 - e_3)},$$

porta i punti $p = \infty, e_1, e_2, e_3$ rispettivamente nei punti $1, -1, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}$, e l'intervallo $p > e_1$ nell'intervallo $-1 < z < 1$; l'attuale valore di k è uguale a quello del caso I). Se ne trae che vale ancora la (β) come nel caso I). Unica differenza è quella che nel caso attuale $p > e_1$. Infatti la p non ha nei due casi lo stesso significato.

Se con $\bar{p}$ indichiamo la p quando $p > e_1$ (caso II)) troviamo che la p di I) è legata alla $\bar{p}$ di II) dalla

$$p = e_2 - \frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{\bar{p} - e_2} \quad [\text{conseguenza delle } (\alpha) \text{ ed } (\alpha')].$$

Questa formola ricorda quella relativa all'aggiunta di un semi-periodo: il lettore spieghi l'intima ragione di questo fatto ⁽¹⁾.

III). Delle tre radici e_i una sola, che indicheremo con e , è reale. Le altre due sono complesse coniugate. Essendo $\Sigma e_i = 0$, le radici complesse saranno $-\frac{e}{2} \pm i\lambda$, con $\lambda > 0$ reale. Posto

$$\rho > 0, \quad \rho^2 = (2\lambda)^2 + (3e)^2,$$

$$z = \frac{3e + \rho}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{\rho - 3e} = \sqrt{\frac{\rho + 3e}{\rho - 3e}} \quad \text{donde} \quad 1 + z^2 = \frac{\rho(\rho + 3e)}{2\lambda^2},$$

la trasformazione

$$p = e - \rho \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{z-1} \right) = e - \rho \frac{z+1}{2(z-1)},$$

porta i punti $z = 1, -1, iz$ nei punti $p = \infty, e, -\frac{e}{2} + i\lambda$, e l'intervallo $p > e$ (in cui il differenziale di WEIERSTRASS è reale) nell'intervallo $-1 < z < 1$.

Si trova poi

$$\frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}} = \frac{dp}{\sqrt{4(p-e)\left\{\left(p+\frac{e}{2}\right)^2 + \lambda^2\right\}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(\frac{\rho-3e}{2\rho}z^2 + \frac{\rho+3e}{2\rho}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k_1^2z^2 + k_1'^2)}}$$

ove si è posto

$$k_1^2 = \frac{\rho-3e}{2\rho}, \quad k_1'^2 = \frac{\rho+3e}{2\rho} = 1 - k_1^2.$$

(Si è scritto k_1 in luogo di k per evitare equivoci coi casi precedenti). L'ultimo differenziale qui scritto, a meno di un fattore costante reale, coincide col terzo membro di (2), quando a z ed a k_1 si sostituiscano le X e k .

⁽¹⁾ Nei casi I) e II) si potrebbero usare le

$$p = e_3 + (e_2 - e_3)z, \quad p = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{z}$$

che portano l'intervallo $e_2 > p > e_3$ oppure $p > e_1$ nell'intervallo $0 < z < 1$, e porre poi al solito $z = t^2$. [Come sopra, si noti la relazione tra i due valori di p , trasformati di uno stesso valore z mediante tali due trasformazioni]. Il differenziale di WEIERSTRASS resta così trasformato in un differenziale del tipo (3), i cui punti di diramazione sono i punti 0, 1, ∞ ed un quarto punto z maggiore di 1.

Resta così completata in tutti i casi la riduzione, con trasformazione reale, del differenziale di 1^a specie di WEIERSTRASS ad un differenziale di LEGENDRE. Avendo già trovato le trasformazioni reali che riducono alla forma di LEGENDRE un qualsiasi integrale ellittico di 1^a specie reale, restano implicitamente determinate anche le trasformazioni reali che riducono un tale integrale ellittico alla forma di WEIERSTRASS.