
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * B. Levi: Analisi Matematica algebrica ed infinitesimale (Gaetano Scorza)
- * S. Saks: Theory of the integral (G. Scorza Dragoni)
- * F. Tricomi: Funzioni analitiche (G. Scorza Dragoni)
- * G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (F. Tricomi)
- * A. Denjoy: Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles
- * E. Noether - J. Cavaillès: Briefwechsel Cantor-Dedekind

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 17 (1938), n.2, p. 119–135.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_119_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_119_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_119_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

RECENSIONI

B. LEVI: *Analisi Matematica algebrica ed infinitesimale*. [Bologna, N. Zanichelli, 1937-(XV), pp. VIII-541, L. 80].

Questo nuovo trattato di analisi matematica del prof. BEPPO LEVI, per ragioni dovute in parte al recente riordinamento degli studi universitari, ha indirizzo ben diverso da quello che egli pubblicò nel 1916 col titolo di « *Introduzione all'analisi matematica* »; ma i due volumi, per quanto volti a conseguire fini differenti, si accordano nel rivelarsi opere di un trattatista che non si adagia in riproduzioni meccaniche di esposizioni tradizionali, ma ripensa per conto suo le materie prese a considerare.

E come con la sua « *Introduzione* » il LEVI dette alla nostra letteratura matematica la prima trattazione completa di talune teorie algebriche, quale ad es. quella dell'intersezione di varietà algebriche, così con questo nuovo libro si attua, con apprezzabili vantaggi, una fusione, finora non così compiutamente realizzata fra i due rami dell'analisi, algebrico ed infinitesimale. Nè d'altronde sono trascurate le esigenze degli allievi ingegneri; chè anzi è la prima volta che di certi procedimenti numerici e grafici venga dato fra di noi ampio conto in un trattato di analisi.

L'opera si inizia con un capitolo dedicato ai polinomi e alle funzioni razionali intere. L'andamento assai piano dell'esposizione e la scelta degli argomenti di cui vi si tratta — introduzione dei segni Σ e Π , calcoli con sommatorie, regola di RUFFINI, teoremi di identità, formule di interpolazione di LAGRANGE e di NEWTON, binomio di NEWTON e formula di LEIBNIZ, polinomi simmetrici, formule di GIRARD-NEWTON, ... — rendono il capitolo particolarmente adatto ad istradare gli allievi nello studio dell'analisi; li fa incontrare presto con questioni interessanti, quali ad es. quelle riguardanti i problemi di interpolazione, ed evita che, iniziando gli studi universitari, abbiano l'impressione di una netta discontinuità con la materia appresa nelle scuole medie.

Di calcolo combinatorio non si espongono che le proprietà dei

coefficienti binomiali, traendo occasione appunto del loro presentarsi nello sviluppo della potenza di un binomio e di tale fatto avvalendosi per stabilirle; e il teorema della esprimibilità di ogni polinomio simmetrico in più variabili quale funzione razionale intera delle loro somme elementari vien dimostrato per via induttiva in modo particolarmente semplice.

L'aver soppresso gli elementi di calcolo combinatorio obbliga ad escogitare una teoria dei determinanti che si allontani da quella abituale.

Si perviene allo scopo nel secondo capitolo presentando un determinante $\|a_{ij}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) come un *prodotto alterno* dei complessi $A_i = (a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{n,i})$ ottenuto col porre $a_{i,j}$ al posto di x_j nello sviluppo della funzione alternante $x_1 x_2 \dots x_n \prod_{i>j} (x_i - x_j)$. Si fa

ricorso così ad una definizione che può farsi risalire al CAUCHY: ma essa non era stata mai utilizzata per dedurne sistematicamente, come qui vien fatto, tutte le proprietà dei determinanti e le loro applicazioni alla teoria dei sistemi di equazioni lineari. È un capitolo che si legge con interesse per la novità delle argomentazioni e per la forma che vien data alla regola atta ad assegnare la soluzione generale di un sistema di m equazioni lineari con n incognite.

Il capitolo terzo parte dall'espressione di un complesso come combinazione lineare di complessi unità per affrontare in modo sistematico il problema generale della moltiplicazione dei complessi; accenna ai legami che tale ordine di considerazioni presenta con la teoria dei determinanti; si ferma in particolare sul caso in cui il prodotto di due complessi di un dato sistema risulta ancora un complesso dello stesso sistema, come accade pei numeri complessi ordinari e pei quaternioni; assegna gli elementi fondamentali del calcolo vettoriale; mostra come i quaternioni possano anche presentarsi quali operatori su vettori.

Il breve capitolo IV è dedicato espressamente ai numeri complessi ordinari; ne dà le rappresentazioni cartesiana, polare e trigonometrica, nonchè la rappresentazione euleriana, quella cioè per cui il numero complesso $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ viene espresso con $\rho e^{i\varphi}$; ma naturalmente a questo punto del trattato una tale espressione viene introdotta come un puro simbolo, perchè alla definizione di e non si perverrà che più tardi. Dimostrata la formula di MOIVRE e assegnate le relazioni di EULERO fra $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $e^{i\varphi}$ ed $e^{-i\varphi}$ se ne traggono sviluppi notevoli per $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$, $\frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi}$, $\frac{\sin 2m\varphi}{\cos \varphi}$, $\frac{\cos (2m+1)\varphi}{\cos \varphi}$, $\sin^m \varphi$, $\cos^m \varphi$.

Il capitolo V, dedicato alla nozione di continuità, è uno dei più originali e dal punto di vista critico uno dei più notevoli del libro. A base della nozione di continuità si pongono quelle di aggregato e di distanza; ciò permette di esporre le definizioni di punto limite di un aggregato, di funzione continua e di successioni di aggregati convergenti a punti limiti senza fare alcuna ipotesi restrittiva sulla dimensione dello spazio entro il quale sono dati gli aggregati o è definita la funzione; e con ciò che il LEVI chiama *ampliamento di una funzione per continuità* si ha modo di estendere in modo rapido e semplice ai numeri reali, identificati coi punti della *scala lineare*, la teoria delle operazioni aritmetiche fondamentali. Una tale identificazione, permettendo di introdurre i numeri reali in modo globale, fa sì che quando si parla di *approssimare* un numero reale mediante numeri razionali, la parola *approssimare* viene adoperata nello stesso senso che le attribuisce il linguaggio ordinario, per il quale ciò che si *approssima* è sempre concepito come preesistente alle successioni approssimanti. Aggiungasi che, presentando il calcolo sui numeri reali come un calcolo sui punti di una retta e quello sui numeri complessi come un calcolo sui punti di un piano di GAUSS, il corpo reale apparisce subito, senza bisogno di identificazioni convenzionali, come un sottocorpo del corpo complesso.

Le generalità del capitolo V vengono applicate con adeguata estensione nel capitolo VI al dominio reale. Ivi si introducono le nozioni di limite superiore ed inferiore, di massimo e minimo limite; si insiste sulle funzioni reali di una variabile reale e sulla loro rappresentazione grafica che viene illustrata mediante esempi; si dimostra il teorema sull'esistenza di uno zero almeno per una funzione continua in un aggregato connesso che in due punti dell'aggregato assume valori di segni contrari e si indicano due procedimenti per la determinazione effettiva di un tale zero, e cioè il *procedimento dicotomico* e quelle delle *parti proporzionali*. I due metodi vengono poi applicati ad esempi indicando minutamente i calcoli numerici necessari.

Il capitolo VII è intitolato « *serie di potenze* » e allo studio di esse è quasi esclusivamente dedicato; per le serie in generale, sulle quali si ritorna più tardi nel cap. XIII, non si danno qui che ben poche indicazioni, e se per esse si incontrano taluni enunciati interessanti, quali, ad es., quello sul prodotto di due serie secondo CAUCHY, si tratta di risultati cui si perviene incidentalmente studiando le serie di potenze. Ciò è insolito, ma non è niente affatto una stranezza: in primo luogo le serie di potenze, non obbligando a distinzione tra variabile reale e variabile com-

più plessa, permettono di introdurre le funzioni fondamentali dell'analisi senza bisogno di limitarsi al campo reale; in secondo luogo esse sono le serie a comportamento più facilmente dominabile. Comunque il LEVI se ne avvale per lo studio delle funzioni esponenziale e logaritmica; e dalla dimostrazione delle proprietà più importanti delle serie di potenze (teorema di CAUCHY-HADAMARD, convergenza assoluta ed uniforme, teorema d'ABEL, continuità delle funzioni da esse rappresentate) deduce come già abbiamo accennato conseguenze interessanti per il calcolo delle serie a termini costanti.

Alla teoria della derivazione sono dedicati i capitoli VIII e IX, contraddistinti da ciò che nel primo si dà luogo di preferenza alle considerazioni che valgono indifferentemente per il campo reale ed il campo complesso, nel secondo a quelle che riguardano particolarità del campo reale. Così nel cap. VIII sono raccolte le regole di derivazione, la formula di TAYLOR, una prima forma della regola del DE L'HOSPITAL, il teorema della derivazione di una serie di potenze, cose tutte che non richiedono la limitazione al campo reale; nel capitolo IX si parla di funzioni crescenti o decrescenti, si espongono i teoremi di ROLLE, CAVALIERI, DARBOUX, CAUCHY e si ritorna sulla regola del DE L'HOSPITAL per stabilirla, nel campo reale, sotto ipotesi diverse da quelle precedentemente considerate.

Il capitolo X è di natura strettamente algebrica. Contiene: la dimostrazione del così detto teorema fondamentale dell'algebra, condotta dapprima secondo un procedimento indicato dal MOTZKIN e dall'OSTROWSKI, poi, senza entrare in troppi dettagli, in una delle forme dovute a GAUSS; la regola dei segni di CARTESIO; la risoluzione delle equazioni binomie; la risoluzione delle equazioni cubiche secondo TARTAGLIA e secondo LAGRANGE. Del metodo di LAGRANGE si mostra l'applicabilità al caso delle equazioni cicliche, fra le quali rientrano le equazioni reciproche. Il capitolo si chiude trattando il problema della scomposizione di una funzione razionale fratta in frazioni semplici.

Lo studio degli integrali è compiuto nei capitoli XI e XII; nel primo vengono introdotti quali funzioni primitive, di guisa che di regola non si fa distinzione tra variabile reale e variabile complessa; nel secondo vengono considerati quali limiti di somme e l'attenzione si concentra sulle funzioni reali di variabile reale. Nel primo trovan posto le classiche regole di integrazione; la loro applicazione, illustrata con larga copia di esempi, ai vari tipi di funzioni integrabili in termini finiti; l'integrazione per serie; alcuni teoremi di confronto e di media; le disuguaglianze di

SCHWARZ e MINKOWSKI; la valutazione del resto della serie di TAYLOR nelle varie sue forme. Nel secondo, premesso un cenno, dell'integrazione grafica e meccanica, la nozione di integrale definito, con metodo dovuto, notoriamente, al LEVI, viene stabilita in maniera che la trattazione contempli insieme i casi dell'integrale secondo RIEMANN e dell'integrale secondo LEBESGUE. Quest'ultimo viene così introdotto indipendentemente dalla teoria della misura ed è la prima volta che tale nozione comparisce in un'opera dedicata ai giovani del primo biennio delle nostre facoltà di matematiche. Il capitolo, svolte le proprietà fondamentali degli integrali unidimensionali (integrali generalizzati, permutabilità delle operazioni di limite e di integrale, integrazione e derivazione per serie, derivazione sotto il segno di integrale) si chiude con uno studio sufficientemente ampio degli integrali pluridimensionali, della loro riduzione ad integrali multipli e con un cenno dell'integrale di STIELTJES.

Interessantissimo è il capitolo XIII, che è anche il più esteso, per le quistioni che vi si agitano e per la insolita generalità con cui alcune di esse sono considerate. Un cenno, anche sommario ed incompleto, degli argomenti ivi presi in esame (errore nei calcoli approssimati, teorema di BUDAN-FOURIER, calcolo numerico delle radici di un'equazione, limiti e separazione delle radici, massimi e minimi, calcolo approssimato di integrali definiti, formule di quadratura, serie a termini positivi o a termini reali, convergenza condizionata od assoluta, prodotti infiniti, calcolo di $\log n!$, polinomi, serie ed integrali di FOURIER) è sufficiente a mostrarne la ricchezza di contenuto, la quale è accentuata dal fatto, cui già abbiamo alluso, che a proposito delle equazioni non sempre ne viene presupposta l'algebricità. Tale restrizione viene lasciata cadere anche per il teorema di BUDAN-FOURIER, del quale si porge una dimostrazione per via induttiva assai semplice e notevole.

Anche nel capitolo XIV, dedicato alle equazioni differenziali ordinarie, sebbene, per necessità di cose, il suo ambito non ecceda i limiti tradizionali, è da notare qualche novità lodevole; per es. le pagine introduttive sull'integrazione grafica, illustrata con lo sviluppo effettivo di un esempio e il cenno sull'equazione di BESSEL.

Nel capitolo XV, riguardante le funzioni di più variabili trovano posto, fra altro, il teorema della permutabilità delle derivazioni dimostrato in modo semplice e nuovo, l'integrazione di differenziali totali lungo linee aperte o chiuse, la formula di GREEN e quella degli incrementi finiti, la derivazione delle funzioni impli-

cite, cui vengono riattaccati i problemi di eliminazione e di risoluzione per sistemi di equazioni assai generali, la formula di TAYLOR, le questioni di massimi e minimi, il cambiamento di variabili negli integrali multipli e cenni sulle equazioni alle derivate parziali o ai differenziali totali.

L'opera si chiude col capitolo XVI dedicato alle applicazioni geometriche, ove la scelta degli argomenti (varietà pluridimensionali, spazi lineari ad esse tangenti, forma fondamentale della metrica sopra una varietà, estensione di un dominio curvo, involuppi ed applicazione alle soluzioni delle equazioni e dei sistemi differenziali) mostra come il LEVI siasi preoccupato di fornire agli aspiranti ingegneri notizie assolutamente necessarie per orientarsi nelle moderne teorie fisiche; e con tre Note, di cui la prima propone una definizione dei differenziali che non soggiaccia come quelle ordinarie ad appunti critici, la seconda sulla nozione di integrale contiene approfondimenti che non era possibile accogliere nel testo, la terza ritorna sui sistemi di equazioni, considerati già con grande generalità nel cap. XV, per considerare più da vicino il caso delle equazioni algebriche e per mostrare come, procuratasi una soluzione sufficientemente approssimata di un sistema di equazioni non algebriche, sostituendo in esse alle funzioni che vi compariscono dei polinomi approssimanti, l'approssimazione di quella soluzione possa essere migliorata con una generalizzazione del metodo di NEWTON.

Qualche lettore troverà forse troppo diffuso l'esame analitico che di questa pregevole opera siamo venuti facendo; ma avremmo dovuto intrattenerci su di essa — per es. sul cap. XIII — anche più a lungo per dare un'idea adeguata della quantità di questioni che vi sono agitate. Ma quanto si è detto basterà, speriamo, a far sentire la sua non comune ricchezza di contenuto e l'originalità della sua tessitura ispirata a criteri didattici e scientifici degni di attenta considerazione.

GAETANO SCORZA

S. SAKS: *Theory of the integral* [2^a ed. riveduta, tradotta in inglese da L. C. YOUNG, pagg. VII + 347; « Monografje matematyczne », Warszawa, 1937, Doll. 5].

Questa seconda edizione della *Théorie de l'intégrale*, pubblicata nel 1933 come T. II della stessa collezione, si presenta, rispetto alla prima, notevolmente accresciuta e rimaneggiata, in modo da costituire un nuovo contributo alla letteratura matematica.

Vi sono esposte le teorie sviluppatesi dalle ricerche classiche di BOREL, LEBESGUE, BAIRE sulle funzioni di variabile reale, l'evoluzione logica essendo chiarita nelle introduzioni, di cui quasi tutti i capitoli sono forniti; ogni capitolo è ricco di indicazioni bibliografiche.

L'esame di quanto vi è di essenziale nella nozione di integrale di LEBESGUE, mostra che questo integrale si può definire anche per funzioni reali assegnate in uno spazio astratto. La misurabilità di un insieme astratto è caratterizzata dall'appartenenza di questo ad una classe additiva; dopo di ciò si stabilisce la nozione di funzione misurabile, trasportando formalmente la definizione consueta. L'integrale di una funzione misurabile si potrà definire una volta assegnata una misura per ogni insieme misurabile, la funzione misura essendo soggetta a certe restrizioni. Lo studio delle proprietà relative formano l'oggetto del capitolo I.

Se lo spazio astratto è uno spazio metrico, si può applicare ad esso (cap. II) la teoria della misura quale è stata svolta da CARATHÉODORY per uno spazio euclideo. Si parte da una funzione non negativa d'insieme (misura esterna secondo CARATHÉODORY), definita per tutti gli insiemi dello spazio metrico e soddisfacente a certe condizioni, e si determina una classe additiva di insiemi per la quale questa funzione può essere assunta come misura dei suoi elementi. Le restrizioni imposte alla misura esterna portano, fra l'altro, che la classe degli insiemi misurabili ad essa associati non è mai vuota. Ad ogni misura esterna secondo CARATHÉODORY si può quindi associare un integrale.

Un'applicazione di ciò è fatta nel cap. III. Assegnata una funzione d'intervallo (lo spazio ambiente essendo uno spazio euclideo) non negativa e additiva, si dimostra che questa si può prolungare in una funzione d'insieme, che riesce una misura esterna secondo CARATHÉODORY e quindi definisce un integrale. Sfruttando questo, ed il fatto che una funzione di intervallo additiva, a variazione limitata è differenza di due funzioni d'intervallo additive e non negative, si giunge poi alla nozione di integrale di LEBESGUE-STIELTJES relativo ad una funzione d'intervallo additiva e a variazione limitata; la teoria relativa è sviluppata nel capitolo III, nel § 13 del quale sono esposte le nozioni in discorso quali si sono presentate per la prima volta, mentre nel § 9 è mostrato come il teorema di riduzione degli integrali multipli valga anche in uno spazio astratto.

Si passa poi (cap. IV) alla teoria lebesguiana della derivazione delle funzioni di insiemi costituiti da punti di uno spazio euclideo:

queste limitazioni sono necessarie perchè il teorema geometrico di VITALI, su cui la teoria si fonda, vale appunto se per definizione di misura esterna si prende quella originaria di LEBESGUE. Nei §§ 15-16 però è esposta, in ipotesi opportune, una teoria della derivazione in spazi metrici, separabili; mentre nel § 10 il teorema sui punti di densità e sui punti di dispersione di un insieme, è dimostrato, definendo la densità attraverso intervalli che non soddisfanno necessariamente alla condizione di regolarità di VITALI (ma debbono però avere le facce parallele agli iperpiani coordinati).

Fra le applicazioni di questa teoria sono esposti i risultati definitivi sulle curve rettificabili, il che conduce (cap. V) a parlare dei teoremi, anch'essi definitivi, sulla quadratura delle superficie rappresentabili mediante un'equazione del tipo $z = f(x, y)$: per le superficie rappresentate da equazioni parametriche sono ricordate le ricerche di RADEMACHER e RADÒ, manca ogni cenno a quelle di CACCIOPOLI.

Nei capitoli VI, VII, VIII sono studiati gli integrali di PERRON e DENJOY, che danno soluzioni del problema della ricerca di una funzione primitiva più ampie di quella fornita dall'integrale di LEBESGUE. Nel cap. VI si prende in esame l'integrale di PERRON (nel § 5 di questo capitolo è dimostrata l'estensione, dovuta a LOOMAN-MENCHOFF, del teorema di CAUCHY-GOURSAT sulle condizioni di olomorfismo); nel cap. VII si mostra come dalla definizione descrittiva dell'integrale di LEBESGUE si giunga a quelle dei due integrali di DENJOY e si precisano le nozioni necessarie perchè queste abbiano un senso rigoroso, prendendo in esame le funzioni assolutamente continue generalizzate, le derivate asintotiche...; nel cap. VIII sono studiati i due integrali di DENJOY partendo dalle definizioni descrittive (quelle costruttive sono date, dopo le premesse del § 4, nel § 5).

Il capitolo IX è dedicato alle derivate delle funzioni di una o due variabili. Fra i teoremi relativi ricorderemo soltanto quello, affermando che l'esistenza quasi ovunque delle derivate parziali asintotiche è condizione, necessaria e sufficiente, perchè una funzione misurabile sia quasi ovunque dotata di un differenziale asintotico.

Chiudono il libro due Note di BANACH, una sulla misura di HAAR in uno spazio metrico, separabile, localmente compatto, nel quale sia definita la nozione di insiemi congruenti; l'altra sull'integrale di LEBESGUE in spazi astratti.

G. SCORZA DRAGONI

F. TRICOMI: *Funzioni analitiche* [« Monografie di Matematica applicata per cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche », Zanichelli, Bologna, 1936, pagg. VI + 110, L. 35]; *Funzioni ellittiche* [id., id., 1937, pagg. IX + 274, L. 45].

Scopo precipuo di queste monografie è quello di esporre, in vista di applicazioni, la teoria delle funzioni ellittiche. Per ridurre al minimo le nozioni supposte note, nel primo di questi volumi, che ha più che altro carattere di introduzione, sono esposti gli elementi della teoria delle funzioni di variabile complessa: derivate, integrali, teoremi di CAUCHY, MORERA, LIOUVILLE; serie di potenze, poli e punti singolari essenziali isolati; cenni sul prolungamento analitico, trascendenti elementari ed infine i teoremi di MITTAG-LEFFLER e di WEIERSTRASS sulle funzioni meromorfe e sulle trascendenti intere.

Il secondo volume si apre con un'introduzione storica. L'ordine storico non sarà però ciecamente rispettato nell'esposizione della teoria, che è sviluppata ponendo a base le funzioni ellittiche di WEIERSTRASS, studiate nel cap. I (funzione $\wp$, rappresentazione di una funzione ellittica mediante la $\wp$ o come quoziente di due trascendenti costruite a partire dalla σ , studio della $\wp$ a invarianti reali, casi di degenerazione). Nel secondo capitolo si prendono in esame gli integrali ellittici, se ne dà la riduzione ai tre tipi fondamentali, che sono poi studiati in quanto funzioni sulla corrispondente riemanniana. Nel capitolo III invece si passa alle funzioni di JACOBI ed alle funzioni ζ , indicandosi anche come queste possano essere utilizzate per il calcolo degli integrali ellittici.

Dopo la teoria delle trasformazioni del primo e del secondo ordine (cap. IV), si danno (cap. V) suggerimenti per le applicazioni ed esempi di queste spinti fino al calcolo numerico; e precisamente: rettificazione dell'ellisse e dell'iperbole; geodetiche dell'ellissoide di rotazione; asta caricata di punta; pendolo semplice; rappresentazione conforme del piano privato di due cerchi, senza punti comuni, sul piano privato di due segmenti paralleli. Esempi e suggerimenti circa i calcoli si trovano anche nel corso del volume, che si chiude con un lungo elenco riassuntivo delle formule incontrate nel testo.

G. SCORZA DRAGONI

G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, (« Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften », Bd. XLVII, Berlin, Springer, 1937) pagg. XVI + 436, RM. 34,50 (rilegato RM. 36,30).

Nel considerare questo libro di DOETSCH mi son sovvenuto di aver sentito più d'una volta asserire che, nonostante i moderni,

rapidi mezzi di comunicazione, i più recenti progressi della Scienza non divengono effettivamente di pubblico dominio, se non quando siano accolti in qualche trattato di larga diffusione. Invero, se non si tiene conto di ciò, non riesce facile rendersi conto come sia potuto accadere che gli argomenti trattati nell'opera in esame, ad onta della loro grande importanza teorica e applicativa, siano rimasti finora così poco conosciuti fuori di una piccola cerchia di studiosi specializzati. Credo pertanto di poter azzardare la profezia che la presente opera — in cui queste cose vengono per la prima volta pubblicate in forma sistematica — sarà per molti come la rivelazione di un mondo matematico semi-sconosciuto, e segnerà una data nella storia dell'Analisi funzionale.

Il libro di cui ci occupiamo è dedicato principalmente alla teoria ed alle applicazioni della *trasformazione di Laplace in senso stretto*, cioè della trasformazione funzionale lineare $\mathcal{L}$ che muta una data funzione F della variabile reale t nella funzione analitica:

$$(1) \quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \equiv \mathcal{L}\{F(t)\}.$$

Non di rado però, in luogo della (1), viene considerata la trasformazione *bilatera*:

$$(2) \quad f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t) dt \equiv \mathcal{L}_H\{F(t)\}.$$

o anche le intimamente connesse trasformazioni di FOURIER e di MELLIN (per la cui definizione rimandiamo al testo), mentr'invece — per non accrescere ulteriormente la mole del libro, che già così com'è raggiunge le 436 pagine — l'A. ha, purtroppo, dovuto rinunciare a considerare la forma di SIELTJES della trasformazione di LAPLACE, cui pur si riferiscono tanti importanti lavori recenti, del WIDDER ed altri.

L'opera in esame è costituita da 25 capitoli (e un'appendice) suddivisi in 4 parti di varia ampiezza, di cui solo la prima (Cap. 1°-8°) tratta della teoria vera e propria della trasformazione di LAPLACE (abbreviativamente: trasformazione $\mathcal{L}$), mentre le altre si occupano prevalentemente delle sue applicazioni. Precisamente nella prima parte, l'A. — dopo un opportuno inquadramento delle questioni di cui vuol trattare nel più vasto campo della Analisi funzionale (Cap. 1°) e una breve introduzione storica (Cap. 2°) — si preoccupa anzitutto (Cap. 3°) di ben definire il campo delle funzioni F in cui vuol operare (*funzioni «L»*) e chiarisce le ragioni per cui preferisce ricorrere, in questo libro, al concetto d'integrale secondo

RIEMANN anzichè a quello di LEBESGUE. Passa poi (Cap. 4° e 5°) a stabilire le più importanti proprietà delle funzioni trasformate f (funzioni « l »), fra cui principalissima quella che il campo di convergenza dell'integrale (1) è, in generale, un semipiano limitato da una parallela all'asse immaginario; facendo costantemente rilevare le analogie e le differenze con la teoria delle serie di potenze.

I successivi capitoli 6° e 7° riguardano invece la difficile questione dell'inversione della trasformazione $\mathcal{L}$ che talvolta, ma solo talvolta, può ottenersi per mezzo dell'integrale complesso

$$(3) \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s) ds,$$

dove x è una costante reale, entro certi limiti, arbitraria. L'A. insiste però molto, giustamente, sul fatto che la convergenza del precedente integrale complesso *non basta* a garantire la validità della precedente formula d'inversione, il che si spiega tenendo conto che — come l'A. ha osservato per primo — la (3) non è propriamente la formula inversa della (1), bensì della trasformazione bilatera (2).

Finalmente nell'8° ed ultimo capitolo della parte prima: uno dei più importanti di tutto il libro, l'A. studia il modo con cui le più semplici operazioni analitiche (per es.: derivazione, integrazione, applicazione di una sostituzione lineare intera, ecc.) eseguite sulle funzioni « L » o sulle « l », si ripercuotano sulle corrispondenti funzioni dell'altro campo. Stabilisce così, fra l'altro, le fondamentali formule:

$$(4) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{dF}{dt} \right\} = s \mathcal{L} \{ F(t) \} - F(0) \quad \mathcal{L} \{ tF(t) \} = - \frac{d}{ds} \mathcal{L} \{ F(t) \}$$

su cui è, per tanta parte, fondata l'importanza della trasformazione di LAPLACE, e il *Faltungssatz*, cioè il fatto, del pari fondamentale, che — sotto certe condizioni (il cui chiarimento è, in parte, merito dell'A. stesso) — la «*Faltung*», o *prodotto integrale* che dir si voglia, di due funzioni « L »:

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau$$

vien mutato dalla trasformazione $\mathcal{L}$ nell'ordinario *prodotto* $f_1(s)f_2(s)$ delle corrispondenti funzioni « l ».

Con la breve parte seconda (Cap. 9°) entriamo già nel campo delle applicazioni e precisamente di una delle più immediate. Le questioni ivi trattate si aggirano invero intorno al fatto ovvio che,

ad un qualsiasi sviluppo in serie di una funzione $F(t)$ della classe « L », corrisponde — almeno formalmente — un ben determinato sviluppo « coniugato » della corrispondente funzione $f(s)$. Quest'osservazione permette spesso di ottenere, con quasi inverosimile facilità, dei risultati non di rado malagevolmente raggiungibili per altre vie, come mostrano alcuni espressivi esempi addotti nel libro che, in parte, sono dovuti all'A. stesso e qualcuno anche allo scrivente.

Di carattere molto più elevato e difficile è invece la terza parte del libro (Cap. 10°-14°), dedicata alla *asintotica* delle funzioni « l » ed « L ». Essa è anche la meno atta ad essere riassunta in breve, comprendendo tutta una serie di teoremi dai lunghi enunciati che — con nomenclatura ormai già classica — potremo designare quali teoremi *abeliani* e *tauberiani* per la trasformazione di LAPLACE, talvolta considerata sotto la forma bilatera (2) o sotto la forma di MELLIN. Ad essi si aggiungono però anche teoremi di un terzo tipo — che l'A. chiama *abeliani indiretti* — in cui (come nei tauberiani) si cerca di desumere il comportamento asintotico di una funzione « L » da quello della corrispondente « l », ma con l'ausilio di una formula d'inversione, quale per es. la (3), il che implica che i metodi dimostrativi si avvicinino piuttosto a quelli in uso per i teoremi abeliani, anzichè a quelli dei teoremi tauberiani. Particolarmente degna di nota mi sembra, in questa parte 3ª, l'applicazione dei risultati raggiunti al teorema fondamentale sulla distribuzione asintotica dei numeri primi ($\pi(x) \sim x / \log x$) che l'A. fa nel 13° Cap. Invero la nuova dimostrazione così ottenuta di questo classico teorema è, con tutta probabilità, la più semplice finora conosciuta.

Nella quarta parte del libro (Cap. 15°-17°) la trasformazione di LAPLACE viene invece applicata alla risoluzione di un tipo, particolare sì ma assai importante, di equazioni integrali, anche non lineari. Si tratta delle così dette equazioni integrali del *Faltungstypus*, cioè di equazioni che, come per es. le due seguenti:

$$(5) \quad \int_0^t (t-\tau)^{-z} F(\tau) d\tau = G(t) \quad (0 < z < 1), \quad (6) \quad \int_0^t F(t-\tau) F(\tau) d\tau = G(t)$$

possono esser scritte senza far più uso del segno d'integrale, ma in sua vece di quello * della *Faltung*:

$$(5') \quad t^{-z} * F(t) = G(t) \quad (0 < z < 1), \quad (6') \quad F(t) * F(t) = G(t).$$

Tali equazioni, tra cui ve n'è di ben note ed importanti (per es. la prima delle due precedenti è la classica equazione di ABEL:

prototipo della teoria delle equazioni integrali), possono *algebrizzarsi* operando su di esse con la trasformazione di LAPLACE che, come si è già ricordato più sopra, cambia (sotto certe condizioni) la *Faltung* nell'ordinario prodotto delle funzioni trasformate. Per esempio le due precedenti divengono rispettivamente

$$(5'') \quad \frac{\Gamma(1-z)}{s^{1-z}} f(s) = g(s), \quad (6'') \quad f^2(s) = g(s),$$

avendo denotato risp. con $f(s)$ e $g(s)$ le trasformate $\mathcal{L}$ di $F(t)$ e $G(t)$.

Il teorema della *Faltung* può però venir anche utilizzato diversamente, come il nostro A. mostra nei Cap. 16° e 17°, e cioè per la facile deduzione di svariatissime e spesso importanti identità fra funzioni analitiche, non sempre facili a stabilirsi per altra via. Così, per es., dalle ben note formule

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \quad \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{1+s^2},$$

dove J_0 denota la funzione di BESSEL d'ordine *zero*, può immediatamente dedursi l'elegante formula

$$J_0(t) * J_0(t) = \sin t$$

che — sia osservato incidentalmente — fornisce la soluzione dell'equazione integrale (6) nel caso di $G(t) = \sin t$.

La quinta ed ultima parte dell'opera in esame (Cap. 18°-25°), che è forse la più importante di tutte dal punto di vista delle applicazioni tecniche, tratta dell'integrazione di alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie o parziali (essenzialmente: di quelle a coefficienti costanti) per mezzo della trasformazione $\mathcal{L}$. Così come nella quarta parte lo strumento di lavoro era il teorema della *Faltung*, qui esso è costituito essenzialmente dalle formule (4) e dalle loro corrispondenti per le derivate d'ordine superiore, in virtù delle quali, equazioni differenziali *ordinarie* vengono trasformate in equazioni *algebriche* e (per esempio) equazioni *a derivate parziali* con *due* variabili indipendenti, in equazioni differenziali *ordinarie*, ecc.

Come si vede, la trasformazione di LAPLACE presta, nell'integrazione delle equazioni differenziali, gli stessi servizi dei cosiddetti *metodi simbolici* (di HEAVISIDE e simili), anzi più di quelli ⁽¹⁾, senza però presentare le molte incertezze e insufficienze di essi ⁽²⁾.

(1) Si pensi, per es. alla possibilità di tener conto di condizioni iniziali anche non nulle attraverso a termini del tipo dell' $F(0)$ che figura nel secondo membro della prima delle (4).

(2) Cfr., a titolo d'esempio, quanto l'A. osserva a pag. 386 e seg.

Riesce pertanto difficile comprendere — se non si tien conto di quanto si è accennato in principio di questa recensione e della forza dell'abitudine — come i suaccennati metodi simbolici possano aver tuttora tanti seguaci, specie fra gli elettrotecnici ⁽³⁾.

Particolarmente degna di nota sembrami infine, nella parte quinta (19° Cap.), l'acuta analisi a cui l'A. assoggetta lo spirito delle condizioni al contorno nella teoria delle equazioni a derivate parziali della Fisica matematica, giungendo ad una formulazione di queste condizioni che, benchè un po' diversa della consueta, sembra esser quella che meglio traduce in formule la realtà fisica.

Il libro si chiude con un'appendice comprendente le dimostrazioni di alcuni, poco abituali teoremi di Analisi di cui l'A. ha avuto bisogno, una tabella riassuntiva di tutte le trasformate di LAPLACE considerate nel libro ⁽⁴⁾, una lunga serie (pagg. 404-424) di ben 247 note storiche-bibliografiche relative ad altrettanti luoghi del testo, e infine un elenco bibliografico comprendente 69 nomi d'autori e circa 170 lavori sulla trasformazione $\mathcal{L}$ e questioni affini.

Piuttosto strana può apparire l'idea dell'A. di raccogliere in fondo, nelle suaccennate 247 note, tutti i nomi d'autori (esclusi solo i classici) e le citazioni delle fonti. La cosa ha certo il suo *pro* e il suo *contro* ma, con tutta probabilità, quello che ha data qui la spinta decisiva al farlo, è stato il fatto che molte di queste « note » sono veri esami critici di lavori precedenti o piccole bibliografie d'argomenti speciali e, come tali, non sempre contenibili in poche righe. Vedasi, a titolo d'esempio, le note nn. 70, 84, 156, 172 e 220.

Data così una sommaria idea del ricco contenuto dell'opera in esame, possiamo a dire qualche cosa dello stile e del carattere di essa, con la brevità imposta dalla necessità di non allungare eccessivamente questa già lunga recensione.

⁽³⁾ Gli « Heavisidiani », siano essi ortodossi o scismatici, non vengono sempre trattati dal DOETSCH coi guanti di velluto. Essi avrebbero però torto ad aversene a male perchè le sue critiche son sempre fondate e se anche condite talvolta di un po' di umore, ciò è fatto con finezza e misura. A titolo d'esempio voglio qui riportare, traducendola, la nota a piè della pag. 338 del testo: « *Sia qui ricordato che gli Heavisidiani ortodossi rimpiazzano la lettera D con la p, attribuendo a questo rito una speciale, mistica efficacia* ».

⁽⁴⁾ Giova tener presente che la tabella comprende solo le trasformate di LAPLACE incontrate nel testo, e non ha perciò pretese di completezza. Ciò non vuol però dire che una tabella più estesa, non avrebbe forse reso più utili servizi.

Dichiaro subito che a me questo libro ha fatto la più favorevole impressione, non solo per l'importanza degli argomenti trattati — che a me erano, in gran parte, già noti — ma per il *modo* con cui essi son trattati e per l'efficacia dell'esposizione. Questo libro di DOETSCH dimostra invero che, affinchè un'opera matematica riesca rigorosa ed elevata, non è del tutto indispensabile che essa sia nel contempo arida e noiosa. Certo che ottenere ciò non è molto facile, ma è possibile; e non dovrebbe perciò capitare, come purtroppo capita, che libri di questo genere siano quasi un'eccezione! Dato questo stato di cose non è forse inutile cercare di stabilire da che cosa essenzialmente dipenda il fatto che l'opera in esame, nonostante debba trattar spesso di questioni difficili e minute, riesca a non stancare il lettore e a tenerne sempre desto l'interesse.

Le ragioni di ciò sono, naturalmente, più di una, ma, a mio giudizio, la principale è che l'A. cerca sempre di chiarire bene lo *spirito* dei vari teoremi e delle condizioni relative senza rifuggire, all'occorrenza, da espressioni efficaci e colorite se pur non tanto abituali in libri di matematica. Per esempio, a pag. 217, dopo l'enunciato di un teorema tauberiano, l'A. aggiunge: « *Per confronto osserviamo che già dal teor. 5 del Cap. 10° poteva dedursi che, sotto la molto meno restrittiva ipotesi che sia per $s \rightarrow 1$, si ha* Questo fatto è, naturalmente, contenuto nel teorema precedente, ma non viceversa. Quale enorme differenza sussista fra i due risultati si vedrà, del resto, anche nelle applicazioni alla teoria dei numeri ».

Soprattutto io ho la precisa impressione che, nello scrivere questo libro, il DOETSCH abbia *sempre* avuto davanti agli occhi le difficoltà in cui poteva imbattersi il futuro lettore, e *mai* l'opportunità di difendersi da eventuali critiche trincerandosi dietro una corazza di enunciati involuti e di dimostrazioni irte di ϵ e di δ . Del resto, tali corazze possono sì dar talvolta l'impressione di esser momentaneamente utili, ma alla lunga finiscono sempre col nuocere, provocando il malanimo di quei lettori che si accorgono come la fatica durata nella lettura dell'opera sia sproporzionata alle cognizioni con essa acquistate (¹).

Per le ragioni suaccennate e per la fatica e la pena che l'A. ha dovuto indubbiamente incontrare nel *raddrizzar le gambe* a tutta la materia da lui trattata — che, in gran parte, entra qui per la prima volta a far parte di un trattato — credo di poter coscienzio-

(¹) Vedasi, a questo e simili propositi, le giuste critiche mosse da E. BORTANI (*La matematica vista da un ingegnere*, « Rend. Seminario Mat. Milano », 9 (1935), 175-203; v. spec. a pag. 195) a molta parte della letteratura matematica recente.

samente segnalare il DOETSCH alla riconoscenza del mondo matematico internazionale. All'uopo dovrebbe, del resto, bastare la sola circostanza che l'opera di cui ci occupiamo comprende, almeno per quattro quinti, questioni che finora non erano mai state pubblicate in un libro. Ciò è già molto espressivo per chiunque abbia qualche personale esperienza in materia! Qui poi vi è l'aggravante che le fonti originali erano in tali condizioni, quali ben di rado si verificano in Matematica. Invero, anche a prescindere (e completamente non si può!) dall'enorme letteratura sui metodi simbolici, che spesso è priva di ogni valore matematico, anche nei lavori dei studiosi più seri che si erano occupati delle questioni di cui si discorre, non è purtroppo raro trovare gravi lacune e veri errori. Vedasi, per es., quanto il nostro A. osserva nelle sue note nn. 7, 44, 75 e 220. Inoltre, non pochi importanti teoremi sulla trasformazione di LAPLACE — per es. quello sul tendere a zero di una trasformata $\mathcal{L}$ quando ci si allontana all'infinito in un certo angolo — pur avendo finora, per così dire, *aleggiato nell'aria*, nel senso che essi erano generalmente noti in una piccola cerchia di specialisti, non erano però mai stati esplicitamente enunciati, e tanto meno dimostrati!

Tutto considerato, spero che i lettori del libro di cui discorriamo non troveranno esagerata la mia asserzione che esso segnerà una data nella storia dell'Analisi funzionale, e che si associeranno al sottoscritto nell'esprimere l'augurio che quel futuro secondo volume, di cui è cenno nella prefazione del libro attuale, non si faccia troppo attendere! Esso dovrebbe essere particolarmente rivolto all'applicazione della trasformazione di LAPLACE ai problemi al contorno per le equazioni a derivate parziali: un argomento a cui l'A. ha già apportati così importanti contributi personali.

F. TRICOMI

- A. DENJOY: *Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles*. Première partie (p. 55). — Deuxième partie (p. 57).
 E. NOETHER — J. CAVAILLÉS: *Briefwechsel Cantor-Dedekind* (p. 60).
 Collezione Hermann. « Actualités scientifiques et industrielles ». Paris, 1937 (frs. 12, 12 e 20).

I due fascicoli del DENJOY considerano le funzioni di variabile reale l'una per quanto riguarda il loro comportamento nel piccolo (aggregati, continuità, derivazione), l'altra nel grande (integrazione, serie trigonometriche, funzioni quasi-analitiche, funzionali, e funzioni d'insieme): di un argomento di cui si può pensare che la sola bibliografia riempirebbe uguale spazio: essi offrono un pano-

rama sobrio nei particolari, nitido, colorito e suggestivo nell'insieme, una visione rapida ma completa, la quale ci porta dalle origini dell'analisi moderna con CATCHY, ABEL, RIEMANN ai suoi sviluppi caratteristici con BOREL, LEBESGUE, DENJOY, HADAMARD, VOLTERRA. Lettura piacevole per chi conosce l'argomento, utile orientamento per chi s'affaccia a questa branca dell'analisi.

Della corrispondenza fra CANTOR e DEDEKIND una piccola parte, riguardante il problema della successione delle potenze (numeri cardinali) era stata pubblicata da E. ZERMELO nell'edizione delle Memorie del CANTOR (1): esse appartengono tutte al 1899 e riguardano gli ultimi pensieri del CANTOR.

La presente raccolta riguarda il decennio 1872-1882 e ci accompagna lungo il più felice e fruttifero periodo di scoperta del fondatore della teoria degli aggregati: come risultati positivi essa nulla aggiunge al contenuto delle Memorie, ma costituisce un'interessante documentazione che viene a completare. B. L.

(1) GEORG CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, Springer, 1932.

BIBLIOGRAFIA

Libri ricevuti.

- ABRAMESCU N. — *Lectiuni de Geometrie analitică*. Pagg. 655, Cluj, Universitatea, 1937.
- BUHL A. — *Nouveaux éléments d'Analyse*, T. II: *Variables complexes*. Pagg. VI+214. Paris, Gauthier-Villars, 1938.
- GEPPERT H. — KOLLER S. — *Erbmathematik*. Pagg. VIII+228. Leipzig, Quelle & Meyer, 1938.
- Actualités scientifiques et industrielles*, Paris, Hermann, 1937.
- CURIE M. — PROST M. — *Nécessaire mathématique*. Pagg. 116.
- ROCARD Y. — *Les phénomènes d'auto-oscillation dans les installations hydrauliques*. Pagg. 69.
- WEIL A. — *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Pagg. 40.
- YVON J. — *Recherches sur la théorie cinétique des liquides*. I.: *Fluctuations en densité*, pagg. 65; II.: *La propagation et la diffusion de la lumière*, pagg. 135.