
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori Esteri

* Lavori di: Claude Chabauty

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 17 (1938), n.2, p. 117-118.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_117_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_117_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

CLAUDE CHABAUTY: *Sur les équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques fini*, in corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

A ogni soluzione (in numeri interi razionali) dell'equazione

$$\text{norma di } (x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n) = \pm 1,$$

dove le ω_i formano una base per gli interi di un corpo K di grado n , corrisponde una unità $\varepsilon = x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n$; reciprocamente le coordinate di una unità di K forniscono una soluzione della predetta equazione indeterminata.

La presente Memoria porta un contributo al problema di studiare le condizioni per l'esistenza di un insieme infinito E delle dette unità appartenenti a una varietà algebrica W nella rappresentazione di K come spazio vettoriale di dimensione n . Per il caso che W sia lineare di dimensione sufficientemente piccola rispetto ad n , il problema è stato considerato da A. THUE, C. SIEGEL, T. SKOLEM. Si danno qui risultati per il caso che W sia una varietà algebrica di grado qualunque, di dimensione $s \leq n - r - 1$; dove r rappresenta il numero di Dirichlet di K ($r = r_1 + r_2 - 1$, con r_1 numero dei corpi reali e $2r_2$ numero dei corpi complessi fra gli n corpi coniugati di K).

Si riprende perciò l'idea di T. SKOLEM di utilizzare una metrica p -adica, per la quale si introduce una nozione locale di varietà algebroide analoga a quella relativa agli spazi a metrica euclidea; e si raggiungono risultati molto più estesi di quelli ottenuti fin qui: 1°) studiando le relazioni fra il gruppo Γ dei punti rappresentanti le unità e la varietà W (che si suppone contenere un insieme infinito E di punti) coll'intermediario di sottovarietà algebriche di W e di sottogruppi di Γ di dimensione minima rispetto ad E (la cui definizione e il cui uso sono suggeriti dall'esame di alcuni casi triviali); 2°) mediante l'uso, nello spazio di rappresentazione, di trasformazioni (congruenze) e di processi di composizione delle varietà (prodotti) legati semplicemente alla definizione

di prodotto di punti utilizzata, per rappresentare il gruppo delle unità.

Il risultato centrale è contenuto nel teorema:

A ogni insieme infinito E d'unità di K appartenente a una varietà algebrica W di dimensione $s (\leq n - r - 1)$ corrisponde almeno un sottogruppo γ di Γ avente le seguenti proprietà:

1°) *Esiste almeno una classe di Γ/γ che contiene un sottogruppo infinito di E.*

2°) *Fra $r + s - 1 = \sigma$ qualunque dei coniugati di una unità ε appartenente a γ (siano $\varepsilon_{q_1} \varepsilon_{q_2} \dots \varepsilon_{q_\sigma}$) passa una relazione*

$$\varepsilon_{q_1}^{m_{q_1}} \varepsilon_{q_2}^{m_{q_2}} \dots \varepsilon_{q_\sigma}^{m_{q_\sigma}} = 1$$

dove $m_{q_1} \dots m_{q_\sigma}$ sono interi razionali non tutti nulli indipendenti dalla scelta di ε in γ .

Nel capitolo III si esamina la compatibilità della precedente relazione colla natura del gruppo di GALOIS di K ovvero colla natura della varietà W. Si ottengono così i teoremi:

Se la rappresentazione del gruppo di Galois di K mediante le permutazioni su n variabili è ridotta completamente razionalmente quando sono messi in evidenza il sottospazio invariante $x_1 = \dots = x_n$ e quello che gli è ortogonale (in particolare nel caso di corpi di grado primo o aventi per gruppo di GALOIS il gruppo simmetrico) non esiste un'infinità di unità appartenenti ad una varietà algebrica di dimensione $\leq n - r - 1$.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un modulo di base $(1, \omega_1, \omega_2)$ (ove $K = R(\omega_1, \omega_2)$) abbia almeno quattro coniugati immaginari) contenga infinite unità di K, è che esso contenga due unità $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, il cui quoziente $\eta = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$ sia un numero quadratico reale. Se η_1 è l'unità fondamentale di $R(\eta)$, le unità del modulo sono, ad eccezione di un numero finito, fornite tutte e sole dalla formula $\varepsilon = \varepsilon_2 \eta_1^h$, dove h è intero.