
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LAMBERTO CESARI

Proprietà delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.2, p. 105–116.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_105_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_105_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_2_105_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

Proprietà delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche (*).

Nota di LAMBERTO CESARI (a Roma).

Sunto. - *Si danno alcune condizioni sufficienti perchè una funzione, rappresentata mediante una serie trigonometrica, sia continua insieme alle sue prime p derivate nell'intervallo aperto $(0, 2\pi)$.*

Sia

$$(1) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

una serie trigonometrica. Sono noti i seguenti teoremi:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo. I risultati della presente Nota sono stati comunicati all'Accademia delle Scienze di Rumania in data 13 dicembre 1937.

TEOREMA A (SZIDON) ⁽¹⁾. — Se

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta a_n| \lg n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n| \lg n < \infty \quad (2),$$

la (1) è la serie di FOURIER di una funzione integrabile L .

TEOREMA B (KOLMOGOROFF) ⁽³⁾. — Se

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_2 a_n| n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_2 b_n| n \lg n < \infty,$$

la (1) è la serie di FOURIER di una funzione integrabile L .

TEOREMA C ⁽⁴⁾. — Se $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, e se per un numero reale $0 < \sigma < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{\sigma} a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{\sigma} b_n| < \infty,$$

la (1) è la serie di FOURIER di una funzione integrabile L .

TEOREMA D ⁽⁵⁾. — Se $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, e se per un numero reale $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{\sigma} a_n| n^{\sigma-1} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{\sigma} b_n| n^{\sigma-1} \lg n < \infty,$$

la (1) è la serie di FOURIER di una funzione integrabile L .

TEOREMA E ⁽⁶⁾. — Se

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n| < \infty,$$

la (1) converge uniformemente in ogni intervallo chiuso di $(0 - 2\pi)$ verso una funzione continua in $(0 - 2\pi)$ ⁽⁷⁾.

⁽¹⁾ S. SZIDON, *Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen*. « Math. Zeitschr. », Bd. 10 (1921), pp. 121-127.

⁽²⁾ Indichiamo con $\Delta_{\sigma} a_n$, differenze di ordine reale $\sigma \geq 0$ della successione $[a_n]$, dove esistono per ogni n , le quantità

$$\Delta_{\sigma} a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} a_{n+t}, \quad \Delta_1 a_n = \Delta a_n, \quad n=1, 2, \dots$$

⁽³⁾ A. KOLMOGOROFF, *Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue*. « Bulletin int. de l'Ac. pol. des sciences et lettres », S. A. (1923), pp. 83-86.

⁽⁴⁾ L. CESARI, *Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier*. « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. III (1934), pp. 105-134 e in particolare p. 114.

⁽⁵⁾ L. CESARI, loc. cit. in ⁽⁴⁾, p. 126 e p. 133.

⁽⁶⁾ Vedi ad es. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*. Zanichelli, Bologna, 1928, pp. 42-43.

⁽⁷⁾ Noi diremo sempre $(a - b)$ l'intervallo aperto (a, b) .

TEOREMA F ⁽⁸⁾. — Se

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_2 a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_2 b_n| < \infty,$$

vale la tesi del teorema E.

Nel presente lavoro noi diamo delle condizioni semplici e facili, sufficienti perchè la (1) converga, oppure converga secondo medie del CESARO di ordine sufficientemente elevato, verso una funzione $f(x)$ continua in $(0 - 2\pi)$ e dotata di tutte le derivate fino alla p -ma continue in $(0 - 2\pi)$. Tali condizioni, in aggiunta a quelle dei teoremi A, B, C, D ad esempio, danno delle condizioni sufficienti perchè la (1) sia la serie di FOURIER di una funzione integrabile L avente le proprietà di continuità e derivabilità ora dette.

1. Enunciamo il

TEOREMA I. — Se $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, se per un $p \geq 0$ intero si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+1} a_n| n^p < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+1} b_n| n^p < \infty,$$

la (1) converge uniformemente in ogni intervallo chiuso di $(0 - 2\pi)$ verso una funzione $f(x)$ dotata di tutte le derivate fino alla p -ma continue in $(0 - 2\pi)$.

Questo teorema è contenuto come caso particolare nel teorema II.

Si osservi intanto che dal teorema I risulta che nelle ipotesi del teorema B la funzione generatrice della (1) è dotata di derivata prima continua in $(0 - 2\pi)$ ⁽⁹⁾.

Ne risulta inoltre, ad esempio, che, come è già noto per altra via, le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\lg n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\lg n},$$

convergono in $(0 - 2\pi)$ verso funzioni $f(x)$ dotate di tutte le derivate continue in $(0 - 2\pi)$.

2. Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA II. — Se $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, se per un $p \geq 0$ ed un $r \geq 0$ interi si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| n^p < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} b_n| n^p < \infty,$$

la (1) converge uniformemente in ogni intervallo chiuso di $(0 - 2\pi)$

⁽⁸⁾ Loc. cit. in ⁽⁶⁾ pp. 48-49.

⁽⁹⁾ Questo ultimo fatto trovasi osservato e dimostrato per altra via in A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*. « Monografia Matematyczne », Varsavia, 1935, p. 129, 5.7.6.

verso una funzione $f(x)$ dotata di tutte le derivate fino alla p -ma continue in $(0 - 2\pi)$.

Sia $s_m(x)$ la somma parziale m -ma della serie (1) e μ un intero qualsiasi. Cominciamo col dimostrare la seguente formula

$$(2) \quad (-1)^\mu s_m(x) 2^\mu \sin^\mu \frac{x}{2} = \Phi_0^{(\mu)}(x) + \sum_{n=1}^{m-\mu} \Delta_\mu a_n \cos \left[\left(n + \frac{\mu}{2} \right) x + \mu \frac{\pi}{2} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{m-\mu} \Delta_\mu b_n \sin \left[\left(n + \frac{\mu}{2} \right) x + \mu \frac{\pi}{2} \right] + \Phi_m^{(\mu)}(x), \quad (m > \mu),$$

ove

$$(3) \quad \Phi_0^{(\mu)}(x) = (-1)^\mu \frac{1}{2} a_0 \cdot 2^\mu \sin^\mu \frac{x}{2} - \\ - \sum_{t=0}^{\mu-1} (-1)^{\mu-1-t} \Delta_t a_1 \cos \left[\frac{t+1}{2} x + (t+1) \frac{\pi}{2} \right] 2^{\mu-1-t} \sin^{\mu-1-t} \frac{x}{2} - \\ - \sum_{t=0}^{\mu-1} (-1)^{\mu-1-t} \Delta_t b_1 \sin \left[\frac{t+1}{2} x + (t+1) \frac{\pi}{2} \right] 2^{\mu-1-t} \sin^{\mu-1-t} \frac{x}{2}.$$

$$(3') \quad \Phi_m^{(\mu)}(x) = \\ = \sum_{t=0}^{\mu-1} (-1)^{\mu-1-t} \Delta_t a_{m-t} \cos \left[\left(m - t + \frac{t+1}{2} \right) x + (t+1) \frac{\pi}{2} \right] 2^{\mu-1-t} \sin^{\mu-1-t} \frac{x}{2} + \\ + \sum_{t=0}^{\mu-1} (-1)^{\mu-1-t} \Delta_t b_{m-t} \sin \left[\left(m - t + \frac{t+1}{2} \right) x + (t+1) \frac{\pi}{2} \right] 2^{\mu-1-t} \sin^{\mu-1-t} \frac{x}{2}.$$

Intanto la (2) e le (3), (3') sono vere per $\mu=0$ ove si ha $\Phi_0^{(0)}(x) = \frac{1}{2} a_0$, $\Phi_m^{(0)}(x) = 0$.

Supponiamo la (2) e le (3), (3') vere per un certo μ . Moltiplicando la (2) per $\left(-2 \sin \frac{x}{2} \right)$ ed osservando che

$$\cos \left[\left(n + \frac{\mu}{2} \right) x + \mu \frac{\pi}{2} \right] \left(-2 \sin \frac{x}{2} \right) = \frac{\cos \left[\left(n + \frac{\mu+1}{2} \right) x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right]}{\sin \left[\left(n + \frac{\mu+1}{2} \right) x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right]} - \\ - \frac{\cos \left[\left(n - 1 + \frac{\mu+1}{2} \right) x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right]}{\sin \left[\left(n - 1 + \frac{\mu+1}{2} \right) x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right]},$$

si ha

$$- \left(\sum_{n=1}^{m-\mu} \Delta_\mu a_n \dots \right) \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) = \sum_{n=1}^{m-\mu} \Delta_\mu a_n \cos [n + \dots] - \\ - \sum_{n=0}^{m-\mu-1} \Delta_\mu a_{n+1} \cos [n + \dots] = - \Delta_\mu a_1 \cos \left[\frac{\mu+1}{2} x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right] + \\ + \Delta_\mu a_{m-\mu} \cos \left[\left(m - \mu + \frac{\mu+1}{2} \right) x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{m-\mu-1} \Delta_{\mu+1} a_n \cos \left[\left(n + \frac{\mu+1}{2} \right) x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right]$$

e analogamente per b_n . Si ha così

$$\Phi_0^{(\mu+1)} = -\Phi_0^{(\mu)} 2 \sin \frac{x}{2} - \Delta_\mu a_1 \cos \left[\frac{\mu+1}{2} x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right] - \dots$$

$$\Phi_m^{(\mu+1)} = -\Phi_m^{(\mu)} 2 \sin \frac{x}{2} + \Delta_\mu a_{m-\mu} \cos \left[\left(m - \mu + \frac{\mu+1}{2} \right) x + (\mu+1) \frac{\pi}{2} \right] + \dots$$

e da queste si deducono mediante le (3), (3'), scritte per il fissato valore di μ , le (3), (3') stesse per $\mu+1$. La (2) e le (3), (3') sono con ciò dimostrate per ogni μ .

Scriviamo ora la (2) per $\mu = p+r+1$ e osserviamo che da $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ segue

$$\Delta_i a_n \rightarrow 0, \Delta_i b_n \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, p, p+1, \dots, p+r, \text{ per } n \rightarrow \infty,$$

onde, essendo per la (3')

$$\Phi_m^{(p+r+1)}(x) < 2^{p+r+1} \left\{ \sum_{t=0}^{p+r} |\Delta_t a_{m-t}| + \sum_{t=0}^{p+r} |\Delta_t b_{m-t}| \right\},$$

segue

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m^{(p+r+1)}(x) = 0$$

uniformemente in $(-\infty, +\infty)$.

D'altra parte le serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} b_n|$ convergono onde esiste il limite

$$\begin{aligned} (5) \quad F(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{p+r+1} s_m(x) 2^{p+r+1} \sin^{p+r+1} \frac{x}{2} = \\ &= (-1)^{p+r+1} f(x) 2^{p+r+1} \sin^{p+r+1} \frac{x}{2} = \\ &= \Phi_0^{(p+r+1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Delta_{p+r+1} a_n \cos \left[\left(n + \frac{p+r+1}{2} \right) x + (p+r+1) \frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{p+r+1} b_n \sin \left[\left(n + \frac{p+r+1}{2} \right) x + (p+r+1) \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

dove la serie qui scritta converge uniformemente in tutto $(-\infty, +\infty)$ mentre la serie (1) convergerà uniformemente in ogni intervallo chiuso non contenente punti in cui si annulla $\sin \frac{x}{2}$ cioè non non contenente i punti $\pm 2k\pi$, $k=0, 1, 2, \dots$

D'altra parte si osservi che $\Phi_0(x)^{(p+r+1)}$ è un polinomio trigonometrico e quindi rappresenta una funzione dotata di tutte le derivate continue in $(-\infty, +\infty)$ e che la serie (5), derivata termine a termine p volte successive, dà sempre serie assolutamente ed uni-

formemente convergenti in tutto $(-\infty, +\infty)$ essendo esse minori della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |\Delta_{p+r+1} a_n| \left(n + \frac{p+r+1}{2} \right)^p + |\Delta_{p+r+1} b_n| \left(n + \frac{p+r+1}{2} \right)^p \right\}.$$

Per noti teoremi $F(x)$ è dunque dotata di tutte le derivate fino alla p -ma, continue in $(-\infty, +\infty)$; e quindi, essendo

$$f(x) = F(x) : \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^{p+r+1},$$

$f(x)$ è dotata di tutte le derivate fino alla p -ma continue in $(0-2\pi)$.

3. LEMMA I. — Se $[a_n]$ è una successione di numeri reali, se $p \geq 0$, $r \geq 0$ sono due interi e se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{r+1} a_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| n^p < \infty,$$

è anche

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{p+r} a_n| n^{p-1} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{p+r-1} a_n| n^{p-2} < \infty, \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{r+1} a_n| < \infty$$

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{p+r+2} a_n| n^p < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{p+r+3} a_n| n^p < \infty, \dots$$

LEMMA II. — Se $[a_n]$ è una successione di numeri reali, se $r \geq 0$ è un intero e se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{r+1} a_n| < \infty$$

esiste una costante C tale che, per ogni n

$$|\Delta_r a_n| < C, \quad |\Delta_{r-1} a_n| < C(n+1), \dots, \quad |\Delta a_n| < C(n+1)^{r-1}, \quad |a_n| < C(n+1)^r.$$

Da $\Delta_{r+1} a_n \rightarrow 0$ segue $\Delta_{r+2} a_n \rightarrow 0, \dots, \Delta_{r+p} a_n \rightarrow 0, \dots$

D'altra parte dalla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n|$, da $\Delta_{p+r} a_m \rightarrow 0$ e da

$$\Delta_{p+r} a_m - \Delta_{p+r} a_{m'} = \sum_{n=m}^{m'-1} \Delta_{p+r+1} a_n, \quad m < m',$$

segue, per $m' \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |\Delta_{p+r} a_m| &\leq \sum_{n=m}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n|, \\ \sum_{m=0}^k |\Delta_{p+r} a_m| m^{p-1} &< \sum_{m=0}^k m^{p-1} \sum_{n=m}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| < \sum_{m=0}^k \sum_{n=m}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| n^{p-1} < \\ &< \sum_{n=0}^k |\Delta_{p+r+1} a_n| n^{p-1} \cdot n + \sum_{n=k+1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| \cdot n^{p-1} \cdot k, \end{aligned}$$

onde, per ogni k ,

$$\sum_{n=0}^k |\Delta_{p+r} a_n| m^{p-1} < \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| n^p.$$

Da qui la convergenza della prima delle serie (6). Iterando il ragionamento si ottiene successivamente la convergenza di tutte le serie (6).

Per ciò che riguarda le serie (7) si osservi che, essendo

$$\Delta_{p+r+2} a_n = \Delta_{p+r+1} a_n - \Delta_{p+r+1} a_{n+1},$$

si ha

$$\begin{aligned} |\Delta_{p+r+2} a_n| &< |\Delta_{p+r+1} a_n| + |\Delta_{p+r+1} a_{n+1}| \\ \sum_{n=0}^k |\Delta_{p+r+2} a_n| n^p &< 2 \sum_{n=0}^{k+1} |\Delta_{p+r+1} a_n| n^p \end{aligned}$$

da cui la convergenza della prima delle serie (7). Così di seguito per le altre.

Il Lemma I è con ciò dimostrato.

Per il Lemma II si osservi che dalla convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_{r+1} a_n| \text{ e da}$$

$$\Delta_r a_0 - \Delta_r a_m = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta_{r+1} a_n$$

segue l'esistenza del

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_r a_m = l,$$

onde esisterà una costante L_0 tale che $|\Delta_r a_m| < L_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

D'altra parte, essendo

$$\Delta_{r-1} a_0 - \Delta_{r-1} a_m = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta_r a_n,$$

segue

$$|\Delta_{r-1} a_m| < |\Delta_{r-1} a_0| + \sum_{n=0}^{m-1} |\Delta_r a_n| < |\Delta_{r-1} a_0| + mL_0.$$

Esisterà dunque una costante L_1 tale che

$$|\Delta_{r-1} a_m| < (m+1)L_1.$$

Analogamente

$$|\Delta_{r-2} a_m| < |\Delta_{r-2} a_0| + L_1(m+1)^2,$$

onde, per una opportuna costante L_2 ,

$$|\Delta_{r-2} a_m| < (m+1)^2 L_2;$$

e così di seguito, finchè si otterrà

$$|a_m| < (m+1)^r L_r.$$

4. LEMMA III. — Se $r \geq 1$ è un intero e la successione $[a_n]$ è tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_r a_n|$ converga, posto

$$u_n(x) = a_n \cos nx, \quad v_n(x) = a_n \sin nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

le successioni $u_n(x)$, $v_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ convergono (C, r) uniformemente a zero in ogni intervallo chiuso di $(0 - 2\pi)$.

Occupiamoci ad esempio della successione $[u_n]$. In modo affatto analogo si tratta la successione $[v_n]$. Dovremo dimostrare che, posto

$$(8) \quad s_n^{(r)}(x) = \frac{1}{\binom{n+r}{r}} \sum_{t=0}^n \binom{n+r-t-1}{r-1} a_t \cos tx,$$

$s_n^{(r)}(x)$ tende uniformemente a zero per $n \rightarrow \infty$ in ogni intervallo chiuso di $(0 - 2\pi)$. Moltiplicando la (8) per $\left(-2 \sin \frac{x}{2}\right)^r$ si ha, per la (2),

$$\begin{aligned} (9) \quad & s_n^{(r)}(x) \left(-2 \sin \frac{x}{2}\right)^r = \\ & = \left\{ \Phi_0^{(r)}(x) + \Phi_n^{(r)}(x) + \sum_{t=1}^{n-r} \Delta_r \left[\binom{n+r-t-1}{r-1} a_t \right] \cos \left[\left(t + \frac{r}{2}\right)x + r \frac{\pi}{2} \right] \right\} \binom{n+r}{r}; \\ & \Phi_0^{(r)}(x) = \binom{n+r-1}{r-1} a_0 \left(-2 \sin \frac{x}{2}\right)^r - \\ & - \sum_{t=0}^{r-1} \Delta_t \left[\binom{n+r-2}{r-1} a_t \right] \cos \left[\frac{t+1}{2}x + (t+1) \frac{\pi}{2} \right] \left(-2 \sin \frac{x}{2}\right)^{r-t-1}, \\ & \Phi_n^{(r)}(x) = \sum_{t=0}^{r-1} \Delta_t \left[\binom{t+r-1}{r-1} a_{n-t} \right] \cos \left[\left(n-t + \frac{t+1}{2}\right)x + (t+1) \frac{\pi}{2} \right] \left(-2 \sin \frac{x}{2}\right)^{r-t-1}. \end{aligned}$$

Ma in $\Phi_0^{(r)}$ sviluppando le differenze Δ_t si trova una combinazione lineare delle sole $r+1$ costanti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$ e con numeri del tipo $\binom{n+r-t-1}{r-1}$ che sono tutti maggiorati da $C(n+1)^{r-1}$ con una opportuna costante C .

Maggiorando si trova, sempre se C è una opportuna costante,

$$|\Phi_0^{(r)}(x)| < C(n+1)^{r-1}.$$

Per lo studio di $\Phi_n^{(r)}(x)$ si ricordi, dal Lemma I ove si ponga r al posto di $r+1$ e $p=0$, che esiste una costante C tale che, per ogni n , $|a_n| < C(n+1)^{r-1}$, onde anche in $\Phi_n^{(r)}(x)$ sviluppando le differenze si troverà una combinazione lineare di $a_{n-r+1}, a_{n-r+2}, \dots, a_n$ con coefficienti del tipo $\binom{t+r-1}{r-1}$, $t=0, 1, \dots, r-1$, certo limi-

tati indipendentemente da n . Maggiorando si troverà quindi per una opportuna costante C

$$|\Phi_n^{(r)}(x)| < C(n+1)^{r-1}.$$

È d'altra parte

$$\Delta_r \left[\binom{n+r-t-1}{r-1} a_t \right] = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \Delta_s a_t \Delta_{r-s} \binom{n+r-t-s-1}{r-1}$$

ove

$$\Delta_{r-s} \binom{n+r-t-s-1}{r-1} = \begin{cases} \binom{n-t-1}{s-1} & \text{per } s=1, 2, \dots, r \\ 0 & \text{per } s=0. \end{cases}$$

Per il Lemma II si ha ora

$$|\Delta_s a_t| < C(t+1)^{r-s-1}, \quad s=0, 1, 2, \dots, r-1$$

e d'altra parte

$$\binom{n-t-1}{s-1} < C(n+1)^{s-1}$$

ove C è una opportuna costante. Si ha quindi, per una opportuna costante C ,

$$\left| \Delta_r \left[\binom{n+r-t-1}{r-1} a_t \right] \right| < C \sum_{s=1}^{r-1} (t+1)^{r-s-1} (n+1)^{s-1} + |\Delta_r a_t| \binom{n-t-1}{r-1},$$

e infine la terza espressione in (9) è minore di

$$C \sum_{t=1}^{n-r} \sum_{s=1}^{r-1} (t+1)^{r-s-1} (n+1)^{s-1} + \binom{n-1}{r-1} \sum_{t=1}^{\infty} |\Delta_r a_t|.$$

La prima parte è minore di

$$C \sum_{s=1}^{r-1} (n+1)^{s-1} \sum_{t=1}^{n-r} (t+1)^{r-s-1} < C \sum_{s=1}^{r-1} (n+1)^{s-1} (n+1)^{r-s} < Cr(n+1)^{r-1}.$$

La seconda è pure minore di

$$C(n+1)^{r-1}.$$

Si ha dunque, per una opportuna costante C ,

$$\left| s_n^{(r)}(x) \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^r \right| < C(n+1)^{r-1} \cdot \binom{n+r}{r}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[s_n^{(r)}(x) \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^r \right] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(r)}(x) = 0,$$

la prima uniformemente in $(-\infty, +\infty)$, la seconda uniformemente in ogni intervallo chiuso di $(0-2\pi)$.

5. Siamo ora in grado di dimostrare il

TEOREMA III. — Se $p \geq 0$, $r \geq 0$ sono due interi tali che

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{r+1} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{r+1} b_n = 0,$$

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| n^p < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} b_n| n^p < \infty,$$

allora la (1) converge (C, $r+1$) uniformemente in ogni intervallo chiuso di $(0-2\pi)$ verso una funzione $f(x)$ continua in $(0-2\pi)$ e dotata di tutte le derivate fino alla p -ma continue in $(0-2\pi)$.

Per il Lemma I si ha $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{r+1} a_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{r+1} b_n| < \infty$; perciò, scritta la (2) per $\mu = r+1$,

$$s_m(x) \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^{r+1} = \Phi_0^{(r+1)} + \Phi_m^{(r+1)} + \sum_{n=1}^{m-r} |\Delta_{r+1} a_n \cos[...]| + |\Delta_{r+1} b_n \operatorname{sen}[...]|,$$

la sommatoria rappresenta la somma parziale di una serie assolutamente ed uniformemente convergente in $(-\infty, +\infty)$ e $\Phi_0^{(r+1)}(x)$ è un polinomio fisso. Si ha d'altra parte dalle (3), (3'), per $\mu = r+1$,

$$\begin{aligned} \Phi_m^{(r+1)}(x) = \sum_{t=0}^r \sum_{s=0}^t (-1)^s \binom{t}{s} a_{m-t+s} \cos \left\{ \left[(m-t+s) - s + \frac{t+1}{2} \right] x + \right. \\ \left. + (t+1) \frac{\pi}{2} \right\} \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^{r-t} + \dots \end{aligned}$$

e, sviluppando coseni e seni e raccogliendo,

$$\Phi_m^{(r+1)}(x) = \sum_{n=0}^r \left\{ a_{m-n} \cos(m-n)x \varphi_n(x) + a_{m-n} \operatorname{sen}(m-n)x \psi_n(x) + \dots \right\}$$

ove le funzioni $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, ... non dipendono da m e sono continue e limitate in $(-\infty, +\infty)$. Dal Lemma III, ove si ponga $r+1$ al posto di r , si ha senz'altro la convergenza (C, $r+1$) uniforme in ogni intervallo chiuso di $(0-2\pi)$ verso zero di $\Phi_m^{(r+1)}(x)$. Per quanto si è osservato sopra, la stessa cosa vale quindi per $s_m(x) \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^{r+1}$ e quindi per $s_m(x)$. Si può dunque scrivere

$$\begin{aligned} (12) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^{r+1} &= f(x) \left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^{r+1} = \\ &= \Phi_0^{(r+1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{r+1} a_n \cos[...]| + |\Delta_{r+1} b_n \operatorname{sen}[...]|. \end{aligned}$$

Diciamo $S_m(x)$ la somma parziale m -ma della serie al terzo membro della (12) e moltiplichiamo per $\left(-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^p$. Ripetendo il

ragionamento fatto per il teorema II e tenendo conto della (4), si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \Phi_0^{(r+1)}(x) + S_n(x) \left(-2 \sin \frac{x}{2} \right)^p = f(x) \left(-2 \sin \frac{x}{2} \right)^{p+r+1} = \right. \\ \left. = \Phi_0^{(p+r+1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Delta_{p+r+1} a_n \cos [...] + \Delta_{p+r+1} b_n \sin [...] \right\} \right\}.$$

Da qui, sempre con lo stesso ragionamento fatto nel teorema II, l'asserto.

6. Vale inoltre il seguente

TEOREMA IV. — Se $p \geq 0$, $r \geq 0$ sono due interi, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^r} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^r} = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta_{p+r+1} \frac{a_n}{n^r} \right| n^{p+r} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta_{p+r+1} \frac{b_n}{n^r} \right| n^{p+r} < \infty,$$

vale la tesi del teorema III.

Infatti si ha subito ⁽¹⁰⁾

$$\Delta_{p+r+1} a_n = \Delta_{p+r+1} \left(\frac{a_n}{n^r} \cdot n^r \right) = \sum_{s=0}^{p+r+1} \binom{p+r+1}{s} \Delta_{p+r+1-s} \frac{a_n}{n^r} \nabla^s n^r = \\ = \sum_{s=0}^r \binom{p+r+1}{s} \Delta_{p+r+1-s} \frac{a_n}{n^r} \nabla^s n^r.$$

Ma è

$$|\nabla^{p+r+1-s} \Delta n^r| < C(n+1)^{r-s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, r,$$

ove C è una costante indipendente da n , e quindi

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{p+r+1} a_n| n^p < 2^r C \sum_{s=0}^r \binom{p+r+1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta_{p+r+1-s} \frac{a_n}{n^r} \right| n^{p+r-s}.$$

Si applichi ora il Lemma I alla successione $\frac{a_n}{n^r}$ e al posto degli interi r e p del Lemma I si pongano 0 e $p+r$. Ne risulta

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta_{p+r+1-s} \frac{a_n}{n^r} \right| n^{p+r-s} < \infty, \quad s = 0, 1, 2, \dots, p+r.$$

Tutte le $r+1$ serie (13) perciò convergono.

⁽¹⁰⁾ È infatti

$$\Delta(u_n v_n) = u_n(v_n - v_{n+1}) + v_{n+1}(u_n - u_{n+1}),$$

ossia, posto

$$\nabla v_n = v_{n+1}, \quad \Delta(u_n v_n) = u_n \Delta v_n + \Delta u_n \nabla v_n,$$

e quindi in generale

$$\Delta_p(u_n v_n) = \sum_{t=0}^p \binom{p}{t} \Delta_t u_n \nabla^t \Delta_{p-t} v_n,$$

p intero.

D'altra parte dalle (14) per $s = p + r, p + r - 1, \dots, p$ si verifica la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta \frac{a_n}{n^r} \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta_2 \frac{a_n}{n^r} \right| n, \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta_{r+1} \frac{a_n}{n^r} \right| n^r$$

e quindi

$$(15) \quad \left| \Delta \frac{a_n}{n^r} \right| \rightarrow 0, \quad \left| \Delta_2 \frac{a_n}{n^r} \right| \cdot n \rightarrow 0, \dots, \quad \left| \Delta_{r+1} \frac{a_n}{n^r} \right| n^r \rightarrow 0.$$

Si osservi ora che

$$\begin{aligned} \Delta_{r+1} a_n &= \Delta_{r+1} \left(\frac{a_n}{n^r} \cdot n^r \right) = \sum_{s=0}^{r+1} \binom{r+1}{s} \Delta_{r+1-s} \frac{a_n}{n^r} \cdot \nabla^{r+1-s} \Delta_s n^r = \\ &= \sum_{s=0}^r \binom{r+1}{s} \Delta_{r+1-s} \frac{a_n}{n^r} \cdot \nabla^{r+1-s} \Delta_s n^r. \end{aligned}$$

Ma per una opportuna costante C si ha, per ogni $n > 1$,

$$|\nabla^{r+1-s} \Delta_s n^r| < C n^{r-s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, r$$

e quindi

$$\left| \Delta_{r+1} a_n \right| < C \sum_{s=0}^r \binom{r+1}{s} \left| \Delta_{r+1-s} \frac{a_n}{n^r} \right| \cdot n^{r-s}$$

e per le (15)

$$\Delta_{r+1} a_n \rightarrow 0.$$

Analogamente per le b_n .

Sono dunque soddisfatte tutte le ipotesi del teorema III.

7. Risulta ad esempio, sia dal teorema III che dal teorema IV, che, come è già noto per altra via, le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx$$

convergono rispettivamente $(C, 1)$, $(C, 1)$, $(C, 2)$, $(C, 2)$ verso funzioni $f(x)$ dotate di tutte le derivate continue in $(0 - 2\pi)$. Altrettanto ad es. per le serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lg n \cos nx, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \lg n \sin nx.$$