
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * H. F. Baker: Principles of Geometry (Beniamino Segre)
- * P. Appell: Traite de mécanique rationnelle (B. Levi)
- * Alfred Tarski: Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik (B. Levi)
- * R. Nevanlinna: Eindeutige Analytische Funktionen.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.1, p. 41–59.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_41_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_41_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_41_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

RECENSIONI

H. F. BAKER: *Principles of Geometry*, Cambridge University Press (6 vol. rileg.). — Vol. I, *Foundations* (2^a ed., 1929; prezzo 12 s.); vol. II, *Plane Geometry* (2^a ed., 1930; prezzo 15 s.); vol. III, *Solid Geometry* (2^a rist., 1934; prezzo 15 s.); vol. IV, *Higher Geometry* (1925; prezzo 15 s.); vol. V, *Analytical principles of the theory of curves* (1933; prezzo 15 s.); vol. VI, *Introduction to the theory of algebraic surfaces and higher loci* (1933; prezzo 17 s. 6 d.).

Questo grande Trattato, i cui tre primi volumi già sono giunti alla 2^a edizione, non è noto in Italia quanto dovrebbe essere in base ai suoi meriti. Ciò è forse da ascriversi, oltre all'esistenza fra noi di ottimi testi concernenti i vari rami di Geometria, al fatto che i pregi dell'opera non sono appariscenti, in quanto l'A. preferisce sovente alle teorie generali il particolare minuto ed elegante, sì che qualche volume e molti capitoli appaiono quali mosaici a vivaci colori, il cui disegno si comprende ed apprezza solo dopo uno studio abbastanza approfondito; senza contare che la scelta delle notazioni, talora poco simmetriche e diverse dal consueto, la quasi assoluta mancanza di enunciati che pongano in evidenza i risultati conseguiti, e la densità tipografica forse eccessiva di alcune pagine, non sono certo fatte per invogliare il lettore.

L'opera in discorso, tuttavia, è condotta con fine gusto estetico e vigile sensibilità geometrica, e mostra tutta la gamma smagliante dei metodi e dei risultati della Geometria algebrica intesa in senso lato, alla quale costituisce un'introduzione ampia, dotta e suggestiva; tanto che non è arrischiato presumere che il notevole risveglio geometrico che si riscontra oggi in Inghilterra le sia per buona parte dovuto.

L'opera non pretende in alcun modo di essere completa, sia nella scelta che nell'elaborazione dei singoli argomenti; ed anzi mancano o sono troppe sommariamente esposte varie importanti questioni (come p. es. quelle inerenti alle proiettività fra forme

di 2^a e 3^a specie sovrapposte, la geometria non euclidea dello spazio, la teoria generale della polarità rispetto ad una forma algebrica, la teoria delle trasformazioni razionali o birazionali fra piani o fra spazi), l'inclusione di alcune delle quali sarebbe pure stata opportuna allo scopo di attenuare una certa discontinuità che si constata fra i primi quattro volumi, di natura prevalentemente sintetica e proiettiva, e gli ultimi due, dedicati principalmente allo studio analitico della Geometria sopra una curva e sopra una superficie algebrica. Ciò non toglie che il Trattato in esame sia una guida eccellente alle multiformi teorie della Geometria algebrica, tanto per la chiarezza e la semplicità delle direttive, in parte originali, alle quali si ispira e per la splendida ricchezza del suo contenuto geometrico, quanto per le molte citazioni ed indicazioni bibliografiche, per le spiegazioni di carattere intuitivo, e per i numerosi esempi di cui è corredato.

Ecco in breve la trama dei sei volumi, ai quali un settimo — relativo alle proprietà topologico-trascendenti delle varietà algebriche superiori — dovrebbe far seguito.

Il t. I è dedicato ai *fondamenti della Geometria proiettiva*, acquisiti seguendo una via che — prescindendo da ogni nozione metrica — conduce senza pedanteria a chiarire i significati ed i mutui legami dei concetti e dei postulati che stanno alla base di tale disciplina, portando pure all'introduzione delle coordinate e del simbolismo algebrico.

Il volume si divide in tre capitoli. Nel 1° di questi la Geometria proiettiva dello spazio è svolta come sistema ipotetico-deduttivo, nel quale la scelta dei postulati vien specialmente suggerita da ragioni di semplicità e di simmetria. Dalle proposizioni di incidenza nello spazio a 3 dimensioni vengono anzitutto dedotti il principio di dualità, il teorema di DESARGUES sui triangoli omologici, le prime proprietà dei gruppi armonici, ed il fatto che un « riferimento » (ossia il prodotto di più proiettività) fra punteggiate può sempre ottenersi come prodotto di due sole prospettività. Seguono cenni sulle proposizioni di incidenza, sul principio di dualità e sulle operazioni di proiezione e sezione negli spazi a più dimensioni. Si passa quindi a stabilire l'equivalenza fra l'esistenza di coppie di schiere rigate complementari, il teorema di PAPPO, e l'unicità del « riferimento » fra due punteggiate di cui si assegnino 3 coppie di elementi omologhi. Infine vengono introdotti simboli algebrici appropriati per rappresentare la dipendenza lineare di

un punto da più altri, mostrandone la legittimità col provare la coerenza fra rappresentazione simbolica e proposizioni di incidenza; si assegna poi l'interpretazione geometrica delle leggi fondamentali dei simboli algebrici, e si dimostra come il teorema di PAPPo equivalga alla commutatività del prodotto di questi ultimi (dove segue l'indipendenza di tale teorema dalle proposizioni di incidenza).

Il cap. 2° tratta di quella ch'esso chiama la « geometria reale », ossia della geometria dello spazio di punti (reali) accessibili, concepito come una regione limitata e convessa. L'estensione del teorema di DESARGUES permette dapprima di ampliare tale spazio, coll'introduzione di elementi fittizi o virtuali, in modo che nello spazio ampliato valgano le proposizioni di incidenza, per la verifica delle quali rimane tuttavia sufficiente la considerazione degli elementi accessibili. A ciò si collegano alcune osservazioni sulle coppie che si separano, e la dimostrazione dell'indipendenza del teorema di DESARGUES dalle proposizioni di incidenza nel piano. Seguono le deduzioni — nella geometria reale ampliata — del teorema di PAPPo e del teorema fondamentale della geometria proiettiva secondo STAUDT, basate sulle nozioni di ordine e continuità della retta e sulla considerazione delle scale armoniche.

Il cap. 3° ritorna al punto di vista astratto del cap. 1°; esso comprende lo studio delle prime proprietà relative alle collineazioni fra piani o spazi distinti, il quale porta ad una più soddisfacente giustificazione del simbolismo algebrico, e l'introduzione — per via algebrica — degli elementi imaginari, integrata da alcune loro rappresentazioni reali.

Il volume termina con rapide indicazioni storiche e bibliografiche e con tre brevi Note, due delle quali arrecano qualche complemento alle questioni trattate nel cap. 3°, mentre la terza concerne l'unilateralità del piano reale ampliato.

Il t. II — senza mai servirsi della Geometria elementare, ma poggiando unicamente sulle teorie svolte nel t. I — stabilisce gli elementi della *Geometria piana metrica e proiettiva*, con uno studio relativamente diffuso sulle coniche, e sulle metriche proiettive euclidea e non euclidea nel campo complesso (solo negli ultimi due dei cinque capitoli in cui esso si divide, vien fatta distinzione fra enti reali ed imaginari).

Nel cap. 1°, introdotte le coniche colle loro generazioni mediante forme di 1ª specie proiettive, se ne traggono il teorema di PASCAL ed i principi della teoria della polarità. L'esposizione è

poi completata da un'ampia ma piuttosto frammentaria raccolta di 37 esempi, dedicati a nozioni (triangoli autopolari, coniche apolari, fasci di coniche, ecc.), proposizioni (di BRIANCHON, SEYDEWITZ, PONCELET, HAMILTON, TAYLOR, ecc.) e costruzioni varie.

Il cap. 2° si occupa delle proprietà proiettive di diverse figure considerate in relazione a due punti fissi, adottando per quelle la terminologia che è d'uso nel caso che questi cadano nei punti ciclici del piano, senza però fare alcun raffronto esplicito colla geometria elementare. Vengono così stabiliti, mediante tale istruttivo processo puramente sintetico e proiettivo, numerosi semplici risultati di natura metrica concernenti il triangolo (baricentri, ortocentri, cerchio dei nove punti, ecc.), i cerchi ed i loro sistemi lineari, nonchè le coniche (assi, proprietà focali, circolo direttore, normali, proprietà particolari di parabole e di iperboli equilateri).

Il cap. 3° è dedicato alla trattazione analitica delle precedenti teorie, basata sull'introduzione delle coordinate proiettive omogenee di punti e rette. Gli sviluppi non hanno però carattere sistematico, limitandosi invece ad una serie di esempi — riferentisi ad argomenti svariati — scelti opportunamente in modo da famigliarizzare il lettore coll'uso delle coordinate.

Il cap. 4° espone brevemente, servendosi dello strumento analitico, alcune facili questioni di realtà relative a punti, rette e coniche di un piano. Quindi (cap. 5°) le geometrie non euclidee vengono inquadrare in modo chiaro e naturale nella trattazione, le misure di distanze e di angoli essendo definite proiettivamente, nel modo ben noto, mediante una conica assoluta. I vari tipi di metrica sono pure ravvicinati — pel tramite di proiezioni — alla geometria sopra una quadrica, con particolare accenno alla trigonometria sferica; e non manca la deduzione della classica rappresentazione della geometria iperbolica sul semipiano di POINCARÉ.

Alla fine del volume trovansi inoltre due interessanti Note — in cui giocano anche semplici considerazioni iperspaziali — sulle configurazioni collegate ai teoremi di PAPPo e di PASCAL (*hexagrammum mysticum*), una breve bibliografia limitata alla Geometria non euclidea, e varie osservazioni, citazioni ed aggiunte riferentisi alle pagine che precedono.

Il t. III si occupa essenzialmente delle *quadriche* e delle *curve e superficie cubiche dello spazio ordinario*, fornendo un quadro ampio e ben congegnato delle loro proprietà proiettive più salienti nel campo complesso, esposte — coll'uso delle coordinate — ordinatamente nei capitoli 1°-2°, 3° e 4°.

Nel cap. 1°, introdotte dapprima le quadriche rigate mediante le loro generazioni proiettive, si determinano relativamente ad esse vari tipi di equazioni e di definizioni possibili ulteriori, ponendo poi le basi dello studio della rappresentazione piana di una quadrica, e della polarità da questa individuata; la teoria non è svolta in modo sistematico ed esauriente, ma è integrata da diversi risultati relativi alle quaterne, quintuple e sestuple di punti coniugati, alle quadriche apolari, ecc.. Le quadriche vengono quindi considerate dal punto di vista della geometria della retta, di cui si espongono gli elementi, diffondendosi specialmente sui complessi lineari e su alcune loro generazioni proiettive (di SYLVESTER e CHASLES).

Numerose proprietà metriche inerenti alle quadriche trovansi raccolte nel cap. 2°, ove sono ottenute come proprietà proiettive in relazione ad una conica assoluta. Senza poter qui entrare in dettagli sulla multiforme ed interessante trattazione, basterà accennare alle questioni concernenti cerchi e sfere, paraboloidi, coni rotondi, sezioni circolari ed ombelichi delle quadriche, segnalando particolarmente l'accurato studio delle proprietà focali di queste ultime, imperniato sulla considerazione del complesso tetraedrale formato dagli assi di un sistema omofocale.

Il cap. 3° si occupa anzitutto delle cubiche sghembe, definite come intersezioni residue di due coni quadrici con una generatrice comune. Di esse sono assegnate equazioni, generazioni proiettive, proprietà di tangenti, piani osculatori, quadriche apolari, costruzioni relative al caso che fra i dati figurino un certo numero di corde, ecc.. L'esposizione è completata da cenni sulle curve razionali normali, sui vari tipi di curve intersezioni di due quadriche, e sui gruppi di 8 punti associati rispetto alle quadriche dello spazio.

L'ultimo capitolo, il più spiccatamente originale del volume, giunge al cuore della teoria delle superficie cubiche generali dopo aver premesso uno studio della configurazione delle 27 rette, condotto in modo autonomo, poggiando sul teorema di chiusura relativo alle bisestuple stabilito elementarmente; così, prima ancora di parlare delle superficie cubiche, si considerano quadriche di SCHUR, triedri di STEINER, ecc.. Le superficie cubiche sono poscia introdotte mediante una semplice costruzione geometrica, e tosto collegate cogli sviluppi precedenti, deducendone la generazione proiettiva mediante tre stelle collineari, le rappresentazioni su di un piano o su di una quadrica, e le equazioni di STEINER, CREMONA e SYLVESTER. La ben nota possibilità di ottenere una quartica piana come contorno apparente di una superficie cubica da un suo punto, permette inoltre di ricavare in modo semplice alcune proprietà

delle bitangenti e dei sistemi di coniche di contatto di una quartica piana. Vi è infine un rapido cenno sulle superficie cubiche con 4 punti doppi e sulle loro duali (le superficie di STEINER).

Il t. IV (diviso in sette capitoli) tratta specialmente di alcune notevoli *configurazioni e varietà degli spazi a 2, 3, 4 e 5 dimensioni*, segnalando le loro analogie ed i loro mutui legami, e mostrando in modo suggestivo l'agilità e la semplicità a cui può in vari casi ridursi l'esposizione e la deduzione di proprietà di Geometria nel piano o nello spazio ordinario, coll'uso degli iperspazi. La materia del volume, importante da più punti di vista nonostante la sua relativa particolarità, è elaborata in modo perspicuo e spiccatamente personale; e non è possibile renderne adeguatamente in poche righe l'eleganza e la multiforme varietà.

Il cap. 1° incomincia coll'utilizzare considerazioni spaziali per stabilire certe interessanti proposizioni nel piano, quali l'esistenza di una conica triangolarmente circoscritta alle 6 coniche iscritte nei 6 pentalateri che si possono formare con 6 rette assegnate genericamente nel piano, un'estensione del teorema di MIQUEL, alcune proprietà di Geometria dei cerchi di un piano, un teorema di WALLACE cogli ampliamenti di STEINER e di CLIFFORD. Vi son poi semplici costruzioni nell' S_4 di un complesso lineare o tetraedrale di rette di S_3 , e la nota rappresentazione in S_4 delle sfere di S_3 . È infine brevemente studiata la rappresentazione kleiniana delle rette di S_3 coi punti di una V_4^2 di S_5 , deducendone il numero delle rette comuni a due congruenze algebriche, la superficie di VERONESE come immagine delle corde di una cubica sghemba, la classica trasformazione di LIE fra rette e sfere di S_3 , ed un'estensione in S_5 del suddetto teorema di WALLACE (dalla quale segue in S_3 il teorema sulle bisestuple di rette).

Il cap. 2° si vale ancora dello spazio per ottenere alcune proprietà inerenti a contatti fra cerchi di un piano, come p. es. le estensioni (di HART e di STEINER) del teorema di FEUERBACH e del problema di MALFATTI.

Il cap. 3° contiene uno studio abbastanza minuzioso — di natura proiettiva — delle quartiche piane bicircolari, ricavate quali proiezioni stereografiche di quartiche sferiche di 1^a specie (generazioni come involuppi di cerchi, proprietà focali, inversioni che mutano la curva in sè, ecc.).

Il cap. 4° tratta di una configurazione notevole ma poco conosciuta, costituita da 27 punti, 216 rette, 720 piani e 72 spazi di S_4 ,

ed intimamente connessa a quella formata dalle 27 rette di una superficie cubica di S_3 .

Nel cap. 5°, introdotta in modo diretto la configurazione delle 15 rette di S_3 (ottenibili nel modo noto a partire da una 5-pla di rette associate), se ne approfondisce lo studio, indagando pure le proprietà dei 6 sistemi ∞^2 di piani incidenti alle rette delle sue 5-ple, e della V_3^4 avente quelle 15 rette come doppie. Alla superficie di KUMMER, ottenuta segnando questa V_3^4 con un suo spazio tangente generico, restano per questa via automaticamente associate 6 congruenze quadratiche (sezioni di quei 6 sistemi di piani), ed i 6 complessi lineari — fra loro mutuamente coniugati — che contengono queste ultime. È quindi anche fatto cenno della superficie meridiana di PLÜCHER, definita quale sezione di V_3^4 con uno spazio passante per una delle sue 15 rette doppie. Non mancano infine gli sviluppi di carattere duale, che portano alla V_3^3 di C. SEGRE; da questa — come contorno apparente da un suo punto su di un S_3 — si perviene di nuovo alla superficie di KUMMER, collegata alla superficie di WEDDLE attraverso alla nota rappresentazione di V_3^3 su di un S_3 .

Il cap. 6° estende il processo del cap. 3°, e si occupa diffusamente delle cicliidi generali e di qualche loro caso particolare (cicliidi di DUPIN), considerandole come proiezioni di V_3^4 basi di fasci di quadriche di S_4 .

Da ultimo (cap. 7°), premesso lo studio delle proprietà connesse ad un esaedro autopolare rispetto ad una V_4^2 di S_5 , si giunge alla figura di KLEIN che ne fornisce l'interpretazione nella Geometria della retta di S_5 . Questa è posta in relazione colla V_3^4 già considerata nel cap. 5°, ricavandone un nuovo modo di ottenere la superficie di KUMMER, che così anche appare come la superficie singolare di un complesso quadratico di rette di S_3 . Di tali complessi viene infine approfondita la rappresentazione sulla V_4^2 di S_5 , con speciale riguardo al caso particolare dei complessi tetraedrali.

Il t. V espone gli elementi della *Geometria sopra una curva algebrica*, considerato dai tre punti di vista algebrico, topologico-trascendente ed aritmetico. Il primo di questi tre indirizzi, che pure sarebbe stato quello più vicino agli sviluppi dei volumi anteriori, non entra qui che di sfuggita, frammisto agli altri due; e non v'è quasi traccia di relazioni geometrico-funzionali, nè del metodo iperspaziale. Il volume, comunque, riesce in neppure 250 pagine a dare un'idea abbastanza chiara della teoria, raggiungendo

done in più modi i punti salienti e soffermandosi altresì su risultati complementari e su applicazioni svariate.

Premesso, nel cap. 1°, un rapido studio delle curve piane razionali ed ellittiche (le prime caratterizzate in relazione al numero dei loro punti doppi e costruite come proiezioni delle curve razionali normali, le seconde definite in base a detto numero e ridotte birazionalmente a curve del 3° ordine), si passa (cap. 2°) a stabilire il teorema sullo scioglimento delle singolarità delle curve piane algebriche, col metodo rapido di SEVERI e ALBANESE. Si giunge quindi nel cap. 3° alla nozione di ramo, sfruttando non già il precedente risultato, ma i classici procedimenti di WEIERSTRASS, coi quali successivamente vengono acquisiti il teorema sui residui di una funzione razionale sopra una curva ed il teorema di ABEL.

Nel cap. 4°, definito come genere il numero degli integrali abeliani di 1ª specie linearmente indipendenti, si perviene con sufficiente rapidità al teorema di RIEMANN-ROCH, seguendo un metodo originale che sfrutta, oltre alle idee di WEIERSTRASS, quelle di ABEL e RIEMANN e di BRILL e NOETHER. Accanto a tale risultato centrale se ne raggruppano numerosi altri, fra cui i teoremi del resto, di CLIFFORD, delle lacune, la considerazione delle curve canoniche e delle serie jacobiane, la costruzione dei gruppi speciali, la determinazione del numero dei moduli.

Il cap. 5° si occupa della costruzione e della topologia della superficie di RIEMANN di una data curva algebrica, in relazione ai periodi dei suoi integrali abeliani. La classificazione e lo studio di questi ultimi e dei loro mutui legami sono poi approfonditi nel cap. 6°, ove trovasi pure stabilito l'inverso del teorema di ABEL.

Il cap. 7° sviluppa sommariamente il metodo aritmetico di KRONECKER e DEDEKIND, pervenendo alle espressioni modulari delle funzioni razionali e degli integrali abeliani sopra una curva algebrica, mediante le funzioni intere fondamentali e le loro reciproche. Come conseguenze si ricavano nuove dimostrazioni pel teorema di RIEMANN-ROCH e per l'inverso del teorema di ABEL, e nuove applicazioni alla teoria delle serie speciali.

Alle curve sghembe è dedicato l'ultimo capitolo (l'8°), ove trovano dapprima le formule di CAYLEY, ricondotte mediante opportune proiezioni e sezioni alle formule di PLÜCKER, ed altresì interpretate dal punto di vista della Geometria sopra la curva; di più, per le curve intersezioni complete di due superficie, sono costruiti — come intersezioni con acconce superficie — i punti d'appoggio delle corde uscenti da un dato punto ed i punti di contatto delle tangenti incidenti ad una data retta. Segue la determinazione dei

caratteri proiettivi, e la costruzione delle serie lineari complete, della serie canonica e degli integrali abeliani di 1^a specie relativi ad una curva sghemba, nota come intersezione residua di due superficie aventi a comune una curva assegnata (eventualmente riducibile). Da ultimo vi è qualche cenno sui risultati di CASTELNUOVO concernenti il massimo genere di una curva algebrica di dato ordine.

Il t. VI espone la teoria generale delle *corrispondenze fra curve*, varie questioni fondamentali di *Geometria numerativa*, e qualche elemento di *Geometria sopra una superficie algebrica*. Tali argomenti sono svolti senza troppe raffinatezze critiche, ma con una veramente notevole copia di esempi e di applicazioni a casi concreti scelti con acume geometrico, in modo da spingere il lettore ad approfondirne lo studio servendosi dei numerosi lavori originali citati.

Il cap. 1° si occupa delle corrispondenze fra i punti di due curve algebriche distinte o sovrapposte, soffermandosi specialmente sulla nozione di valenza e stabilendo — con procedimenti algebrico-geometrici — le formule di CAYLEY-BRILL-HURWITZ, di ZEUTHEN e di JONQUIÈRES. Esso inoltre dà una trattazione limpida e generale della teoria coi metodi trascendenti, valendosi pure del calcolo delle matrici, e segnala le intime relazioni di quella collo studio degli integrali abeliani riducibili, pervenendo al teorema di POINCARÉ (ottenuto in base alle vedute geometriche di ROSATI).

Il cap. 2° contiene un'introduzione, lucidamente elaborata, alla Geometria numerativa secondo SCHUBERT e ZEUTHEN. Dopo alcuni esempi sul conto delle costanti e sul calcolo delle condizioni secondo SCHUBERT, tale calcolo viene ampiamente sviluppato nel caso delle rette di un iperspazio, facendone applicazione al problema delle tangenti multiple di una varietà. Segue la deduzione delle formule di coincidenza di ZEUTHEN, PIERI e SEVERI per le corrispondenze fra punti e fra S_k di due S_r , e delle formule di C. SEGRE e GIAMBELLI per gli ordini delle varietà che annullano i minori di dato ordine di una matrice.

Il cap. 3° fornisce le primissime nozioni sulle trasformazioni cremoniane e sulle involuzioni di gruppi di n punti in un piano, trattenendosi specialmente sui quattro tipi di BERTINI relativi al caso di $n=2$, e limitandosi a dare le citazioni — con qualche vago cenno di giustificazione — dei teoremi classici sull'argomento di NOETHER, BERTINI e CASTELNUOVO.

Nel cap. 4°, poggiando su risultati — ammessi noti — della

teoria della polarità, si ottengono le 5 formule di SALMON colleganti i caratteri proiettivi di una superficie di S_3 dotata di singolarità normali; tali formule vengono poi approfondite nel caso delle superficie rigate, ed anche estese alle superficie di S_4 .

Il cap. 5° introduce in modo elementare gli invarianti I, ω , il sistema canonico ed i sistemi aggiunti di una superficie algebrica di S_3 , con un passaggio graduale da casi semplici al caso generale, che — per quanto un po' prolisso — ha il vantaggio di illustrare e chiarire vari tipi di difficoltà che si presentano fin dagli inizi nella Geometria sopra una superficie.

Il volume termina (cap. 7°) colla trattazione delle principali questioni di equivalenza e di postulazione in S_4 , completata da numerosi esempi (cap. 8°), e collo studio di alcuni problemi particolari, come la determinazione dei caratteri invariantivi delle superficie che rappresentano le coppie ordinate di punti di due curve o le coppie non ordinate di punti di una curva.

BENIAMINO SEGRE

P. APPELL: *Traité de mécanique rationnelle*, t. IV, 2^a ed., fasc. II, mise au jour par A. VÉRONNET, Paris, Gauthier Villars, 1937.

La 1^a ed. del T. IV del *Traité de mécanique rationnelle* di P. APPELL, apparsa in volume unico (1921), fu pubblicata con la collaborazione del VÉRONNET, astronomo all'Osservatorio di Strassburgo.

La 2^a ed. dello stesso tomo viene pubblicata da quest'Autore in fascicoli separati: il primo è del 1932 e tratta delle figure di equilibrio di una massa liquida omogenea in rotazione uniforme; il secondo (1937) è quello di cui qui ci occupiamo; se ne annunzia un terzo sulla costituzione ed evoluzione dell'Universo.

Il volume è diviso in quattro parti, precedute da uno studio storico nel quale l'Autore osserva che la Scienza moderna è nata fin dal secolo XII a Parigi, dove, secondo le ricerche del DUHEM, sono state fondate, nell'epoca medioevale, varie teorie tra le quali è citata quella della caduta dei gravi. Seguendo l'opinione di illustri storici della Scienza, come l'ENRIQUES ⁽¹⁾, noi riteniamo

(¹) Scrive l'ENRIQUES in *Compendio di Storia del pensiero scientifico* Cap. XXV (Bologna, Zanichelli, 1937), alludendo appunto a due discepoli di Buridano, rettore della Sorbona, Alberto di Sassonia e Nicola Oresme: « Siffatte speculazioni, di cui si trova traccia in scritti intorno al 1370, non ebbero gran seguito nelle scuole; pure non furono mai totalmente dimenticate: tantochè ricompaiono con Domenico Soto, professore a Sala-

che, nonostante le ricerche del DUHEM, debba continuare ad attribuirsi a GALILEO GALILEI il merito di aver fondato il metodo sperimentale e di avere per primo introdotto in Meccanica il concetto di accelerazione ed enunciato le classiche leggi della caduta dei gravi che costituiscono uno dei più grandi titoli di gloria del sommo genio pisano (1).

L'oggetto della 1ª Parte è il problema di APPELL che consiste nello studio del moto di una massa fluida eterogenea le cui particelle si attraggono con la legge newtoniana, sottratte all'azione di forze di massa esterne e sollecitate al contorno da una pressione costante (o nulla).

La natura del moto, quando si ammetta l'invariabilità delle mutue distanze delle particelle, è stata riconosciuta da APPELL (2), il quale ha dimostrato che la massa è animata da rotazione uniforme intorno ad un asse baricentrale di direzione fissa (asse minimo o massimo dell'ellissoide centrale d'inerzia). Lo stesso teorema era stato dimostrato dal POINCARÉ nel caso di una massa omogenea. Il VÉRONNET ha riconosciuto che il moto più generale della massa si riconduce in ogni caso ad una rotazione intorno ad un asse baricentrale di direzione fissa, ma ad ogni particella compete una determinata velocità angolare, la cui espressione euleriana dipende dal posto e non dal tempo.

Le superficie di eguale densità si muovono su se stesse e sono in ogni caso rotonde come quelle di livello o isobariche (LICHTENSTEIN)

manca nel 1550, più concretamente applicate al caso della caduta dei gravi. *Di esse non si deve disconoscere, ma neppure esagerare il valore; tanto meno è lecito trarne motivo — col Duhem — a diminuire l'opera che in questo campo spiegherà Galileo, e per contro a glorificare la scolastica.* Certo impera qui, come in ogni dominio della Scienza, il principio della continuità storica: l'impulso allo studio della dinamica viene dalla critica di Aristotele, la quale si fa, prima di tutto, nell'ambito delle scuole; ed in questo stesso ambito, pur tra gli errori e le contraddizioni, in mezzo alle interminabili disquisizioni e alle sottigliezze di una dialettica contorta, si riaffacciano naturalmente alcune idee tramandate dagli antichi, cenni vaghi ed oscuri e presentimenti della verità, frutto dello sforzo di uomini geniali. *Tuttavia non c'è un punto d'arrivo solidamente accertato, cioè una dottrina costituita che venga trasmessa e ricevuta in eredità dai secoli successivi.* Tantochè gli studiosi sono sempre costretti a riprendere la questione per conto proprio esaminando diverse ipotesi e cercando criteri più precisi, per discriminare il loro valore ».

(1) Cfr. LAGRANGE, *Mécanique analytique*.

(2) « *Acta Math.* », t. 47, 1926: *Sur le mouvement d'ensemble, autour de son centre de gravité, d'une masse fluide soumise à l'attraction newtonienne.*

intorno all'asse di rotazione. Quando le superficie di eguale densità coincidono con quelle di livello e solo in tal caso, la velocità angolare è funzione unicamente della distanza dall'asse (distribuzione cilindrica delle velocità).

L'oggetto della 2^a Parte è lo studio delle forme in cui si atteggiavano la superficie esterna della massa rotante e gli strati di eguale densità.

Le figure di equilibrio relativo di una massa eterogenea sono necessariamente rotonde, ma non possono essere ellissoidiche, come ha dimostrato per primo HAMY. È da notare la differenza che sussiste col caso dell'omogeneità, nel quale le figure possono essere ellissoidi rotondi (MAC LAURIN) ed anche non rotondi (JACOBI).

Il teorema di HAMY si estende dalla rotazione uniforme alla rotazione stazionaria (VÉRONNET).

Ciò nonostante le forme ellissoidiche conservano una notevole importanza in quanto le superficie di livello restano praticamente molto prossime agli ellissoidi.

Per piccoli valori della velocità angolare la figura di equilibrio è rigorosamente ellissoidica in prima approssimazione (CLAIRAUT, LAPLACE). Ridiviene tale per valori molto grandi della velocità e dello schiacciamento: le forme limiti sono la sfera (velocità nulla) e il disco.

Si dimostra che le figure intermedie non si allontanano più di un centesimo dalla forma ellissoidica.

L'oggetto della 3^a Parte è lo studio sistematico della figura della Terra. Il metodo indicato dal POINCARÉ è usato per dimostrare il teorema di CLAIRAUT-LAPLACE, quando si trascura il quadrato dello schiacciamento e^2 .

Segue la posizione dell'equazione differenziale del CLAIRAUT che occupa un posto fondamentale in questa teoria.

È fatto cenno di un metodo, dovuto al WAVRE, il quale permette di eseguire i calcoli in seconda approssimazione.

L'Autore fa un'analisi approfondita dei limiti entro i quali rimane compresa l'inversa dello schiacciamento di ogni strato, in particolare della superficie esterna. In questa ricerca hanno fornito un contributo cospicuo gli sviluppi puramente teorici. Soltanto delicate considerazioni concernenti l'equazione del CLAIRAUT hanno permesso di dare una soluzione soddisfacente del problema che va al di là della precisione delle misure geodetiche.

Le formole del CLAIRAUT avevano fornita due limiti per lo schiacciamento, indipendenti da ogni ipotesi sulla distribuzione delle densità all'interno della Terra, basati soltanto sul rapporto φ della forza centrifuga e dell'attrazione. Le nuove considerazioni

del POINCARÉ, basate oltre che su φ , sul valore J del rapporto dei momenti d'inerzia della Terra, originate da una trasformazione dell'equazione del CLAIRAUT, dovuta al RADAU, hanno condotto ad un nuovo limite fondamentale estremamente notevole $1/e > 297.10$, egualmente indipendente da ogni legge di densità. Il VÉRONNET ha mostrato d'altra parte che si ha $1/e < 297.39$. Si riconosce così come, dai calcoli in prima approssimazione, emerge la circostanza fondamentale che con deduzioni puramente matematiche si è riusciti a calcolare lo schiacciamento terrestre con grande precisione sulla base di misure fisiche (calcolo di φ col pendolo) e astronomiche (calcolo di J dal fenomeno di precessione).

Per avere una conoscenza più precisa delle forme di equilibrio bisognerà tener conto di e' ; i calcoli in seconda approssimazione (AIRY, LEGENDRE, CALLANDREAU, DARWIN, VÉRONNET, WAVRE) modificano poco i limiti dello schiacciamento e permettono di accertare che la figura di equilibrio si schiaccia molto leggermente tra i poli e l'equatore.

Le approssimazioni ulteriori non modificherebbero sostanzialmente i risultati. L'inversa dello schiacciamento risulta così determinata con quattro cifre esatte attraverso le osservazioni astronomiche della precessione e quelle fisiche del pendolo.

L'oggetto della 4^a Parte è lo studio delle variazioni della gravità alla superficie della Terra e dei metodi che consentono di determinare lo schiacciamento attraverso la misura di quelle variazioni; la questione dell'isostasia; l'analisi delle differenti leggi di densità fin qui proposte (ROCHE, LIPSCHITZ, LÉVY); l'analisi delle differenti ipotesi, oltre quella del CLAIRAUT, che possono condurre ad un'accurata valutazione dello schiacciamento. Se si ammette, con POINCARÉ, la solidità della Terra o una distribuzione di velocità interne variabili, si riconosce l'esistenza di una forza tangenziale periodica che emerge dai calcoli della precessione applicati ai differenti paralleli della massa rotante. Tale forza permette di dare una spiegazione dei terremoti e di vari altri fenomeni geologici.

Questa teoria, dovuta al VÉRONNET, conduce a localizzare in particolare la frequenza dei terremoti nella zona del 35° parallelo che contiene Lisbona, la Sicilia, la Persia, l'India, il Giappone, il Messico.

Quando si applichino le teorie precedenti a Giove e Saturno si è costretti ad ammettere che su questi pianeti la velocità di rotazione è maggiore alla superficie che all'interno. Se ne deducano le condizioni meccaniche e fisiche della formazione delle bande parallele all'equatore osservate su quei pianeti.

Si riesce infine a dar ragione dell'anello di Saturno e della formazione delle macchie solari.

Il resto del volume è dedicato allo studio della scissione di una massa in due altre e della formazione possibile delle stelle doppie e dei satelliti dei pianeti.

POINCARÉ ed APPELL hanno precisato il problema dell'evoluzione e della formazione degli astri al quale numerosi ricercatori hanno dato in tempi recenti contributi cospicui. Sarà oggetto di un terzo fascicolo.

G. LAMPARIELLO

WILLIAM F. OSGOOD: *Functions of real variables*. The national university of Peking. University Press, 1936, pp. 399 + XII.

Questo volume raccoglie un corso di lezioni tenuto all'Università di Pechino nel 1934-35 dall'illustre professore emerito dell'Università Harvard di Cambridge (Mass.). Si sa che, specialmente quando si tratta di classificazione, le parole acquistano un significato tacitamente convenzionale; e il termine *teoria delle funzioni di variabile reale*, dopo lo sviluppo avuto dalle ricerche sugli aggregati, sulla integrazione e su altre questioni annesse, al quale l'A. medesimo ha portato vari e pregevoli contributi, è venuto a rappresentare quasi tradizionalmente un ben definito campo dell'analisi che difficilmente si potrebbe ravvisare nel contenuto di queste lezioni: piuttosto potrebbe dirsi trattarsi qui di una *introduzione* a quella teoria ovvero di *complementi d'analisi infinitesimale*, con intenzioni nelle quali sull'interesse informativo prevale forse quello educativo. Sui principii di queste l'A. insiste in modo incisivo nella prefazione: « la sola via nella quale lo studioso possa sperare di giungere a dominare l'argomento è quella di scrivere egli stesso il suo libro » seguendo le dimostrazioni che meglio si adattano al suo spirito: perciò il libro deve essere guida e non vincolo allo studioso. Date queste premesse, diviene naturale che gli argomenti trattati, più che a svolgere un preciso programma teoretico, tendano a destare il senso analitico del lettore; e così, mentre l'A. non trascura occasioni per dar rilievo alla domanda di rigore che distingue l'Analisi moderna in confronto con quella dei secoli passati, abbandona talvolta alla cura dello studioso di precisare qualche particolare dimostrativo su cui il testo sorvola.

Lo stesso criterio pare presiedere alla scelta degli esercizi proposti, variamente distribuiti lungo il testo, con gradi di difficoltà molto diversi e più spesso con criterio di affinità che non di applicazione rispetto alle proposizioni del testo; spesso anche contenenti l'enunciato di proposizioni di importanza non minore di quelle di cui si sviluppa la dimostrazione e delle quali anzi nel testo si farà

uso successivamente. Alle stesse direttive didattiche si ispira evidentemente una certa inversione dell'ordine logico che vien fatto di rilevare principalmente nei primi capitoli (ad es. l'anteposizione della teoria delle serie numeriche a quella dei numeri reali o la dispersione della teoria delle serie in capitoli lontani): inversione che la prefazione consiglia al lettore di aumentare, qualora l'animo glie lo consigliasse ⁽¹⁾. A illustrazione, può servire nel modo migliore l'indice dei capitoli:

I. Convergenza e serie infinite. - II. Il sistema dei numeri. - III. Aggregati, limiti, continuità. - IV. Derivate, integrali, funzioni implicite. - V. Convergenza uniforme. - VI. Le funzioni elementari. - VII. Operazioni algebriche sulle serie. - VIII. Serie di Fourier. - IX. Integrali definiti; integrali lungo una linea. - X. La funzione gamma. - XI. Integrato di Fourier. - XII. Equazioni differenziali. Teoremi d'esistenza.

Il primo capitolo tratta di criteri di convergenza; il secondo della teoria dei numeri reali; nel quarto, come anche in seguito, sono ammesse condizioni di continuità abbastanza ampie, per cui, ad es., l'integrale considerato è senz'altro quello di RIEMANN. Le *funzioni elementari*, al cui studio è destinato il Cap. VI, sono sen, cos, log, exp: e ciò che distingue la trattazione è che la definizione e le proprietà sono ricavate dalle note equazioni differenziali del 2° e del 1° ordine cui dette funzioni soddisfano: il capitolo si chiude collo sviluppo delle funzioni goniometriche in serie di frazioni elementari. La trattazione delle serie di FOURIER è fatta senza soverchie sottigliezze intorno alle condizioni di rappresentabilità di una funzione, ma se ne trae ugualmente occasione per trattarsi sulla sommazione delle serie divergenti: critica più minuta si ha invece nella trattazione degli integrali di FOURIER. Per la dimostrazione dei teoremi d'esistenza delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie si segue il metodo di PICARD delle approssimazioni successive, senza la pretesa di ridurre al minimo le ipotesi.

B. LEVI

ALFRED TARSKI: *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik*. Wien, Springer, 1937, pp. 166+X. R.M. 7,50.

A questo volumetto, traduzione di un originale pubblicato già nel 1936 in lingua polacca, è assegnato dall'A. intento volgariz-

(¹) Qua e là qualche trascuratezza o qualche inesattezza, che non ci pare di dovere particolarmente rilevare, possono trovar giustificazione nell'accennato carattere non sistematico del libro.

zativo dei principii della logica matematica e della loro applicazione alle ricerche sui fondamenti della matematica. Esso è diviso conseguentemente in due parti, di estensione poco differente: « Concetti fondamentali della logica matematica. - Metodo deduttivo » (97 pag.) e « Applicazioni della logica e della metodologia per la costruzione di una parte dell'aritmetica » (68 pag.).

La 1^a Parte si compone di sei capitoli con una divisione che richiama parzialmente la sistemazione hilbertiana: I. Sopra le variabili; II. Sul calcolo delle proposizioni; III. Sulla teoria dell'identità; IV. Sulla teoria delle classi; V. Sulla teoria delle relazioni; VI. Sul metodo deduttivo.

La *parte dell'aritmetica* di cui si occupa la 2^a Parte è quella che tratta, pei numeri reali, delle relazioni di $>$ e $<$ (cap. VII) e delle operazioni di addizione e sottrazione (cap. VIII): seguono nei cap. IX e X alcune considerazioni metodologiche e l'enunciazione di sistemi di postulati su cui possa fondarsi l'intera teoria dei numeri reali.

La preoccupazione didattica, quella cioè di adattarsi a supposte esigenze mentali di lettori non matematici, ci pare domini in modo evidente la redazione, principalmente della prima parte: ne resta l'impressione di una certa prolissità, di una certa ridondanza nell'uso del linguaggio comune, oseremmo dire di alcunchè di logica scolastica, che chiederebbe forse il complemento di un capitolo più sistematico in cui meglio emergessero le caratteristiche della logica matematica come sistema di calcolo simbolico e di analisi delle operazioni logiche fondamentali. Per quella stessa preoccupazione l'A. ha scelto tutti gli esempi di natura matematica nell'aritmetica elementare: e volendo, nella seconda parte, offrire esempio della costruzione assiomatica di un ramo della matematica, e mostrare come in tale costruzione si possa aver ricorso talvolta a idee primitive e a postulati sovrabbondanti, eliminabili con opportuni accorgimenti, egli ha scelto un argomento nel quale tale sovrabbondanza (consistente nell'assumere inizialmente come primitive *entrambe le nozioni* di $<$ e di $>$) risulta così evidente anche al non iniziato, che non possiamo nascondere un dubbio sull'opportunità della scelta, quando si tratti di far partecipare il lettore dell'interesse che anima l'A. per la matematica, intesa come scienza della pura deduzione.

In ordine più sostanziale, ci sia permesso di rilevare che in più occasioni l'A. accenna alla possibilità di una fondazione dell'aritmetica come ramo della logica o, com'egli assume, dell'aritmetica dei numeri reali indipendente da una precedente conoscenza di quella dei numeri naturali. Il decidere se l'una e l'altra cosa

siano possibili dipende dal posto, nell'aritmetica o nella logica, che si voglia dare al cosiddetto postulato dell'induzione matematica o ad un suo equivalente: argomento lungamente discusso da DEDEKIND, PEANO, POINCARÉ e recentemente da HILBERT e BERNAYS, ma cui qui non si accenna: come già il PEANO osservava in un caso analogo, non è possibile dar senso ad una proposizione in cui si parli di *più cose* (termine indeterminato — non evidentemente di *due* o di *tre*) senza che faccia la sua apparizione la nozione di « numero naturale ».

B. LEVI

R. NEVANLINNA: *Eindeutige Analytische Funktionen*. Berlin, Springer, 1936, pagg. 354+VIII. RM. 27,60.

Una funzione analitica $w(z)$ della variabile complessa z definisce una trasformazione conforme fra due domini G_z e G_w (dei quali il secondo generalmente appartenente ad una superficie di RIEMANN a più fogli): mentre la teoria classica delle funzioni analitiche considera questa trasformazione principalmente nel senso diretto, dai valori della variabile a quelli della funzione, la teoria moderna si occupa di preferenza della corrispondenza inversa. Si può dire che essa prenda origine col celebre teorema di PICARD sui valori eccezionali per una trascendente meromorfa e colle ricerche dirette all'approfondimento di esso. R. NEVANLINNA, che agli sviluppi recenti della teoria ha dato ben noti ed importanti contributi, ne porge con questo trattato un aggiornamento dei più suggestivi ed avvincenti. Strumenti principali di dimostrazione, uno topologico di uniformizzazione ch'egli chiama *universelle Ueberlagerungsfläche* e che ricorda la nota costruzione dei domini triangolari di periodicità delle funzioni automorfe, e uno geometrico consistente nella definizione di alcune *metriche* inerenti ai domini studiati: tali la *misura armonica* di un aggregato di punti del contorno del dominio rispetto a un punto variabile di questo (valore in questo punto della funzione armonica che vale 1 nel detto aggregato e 0 negli altri punti del contorno, che nel caso del dominio circolare si riduce alla misura della proiezione dell'aggregato dal detto punto sulla circonferenza medesima) la quale compie un ufficio per molti rispetti analogo alla funzione di GREEN; la *misura sferica* e *iperbolica* (non euclideanee). Un'importanza particolare acquistano gli aggregati di misura armonica nulla, in quanto occupano, rispetto alla teoria delle funzioni armoniche e di variabile complessa un posto analogo a quello degli aggregati di misura (di LEBESGUE) nulla rispetto a quella delle funzioni di variabile reale. La nozione di misura armonica nulla si trova d'altronde

essere equivalente a quella di *capacità nulla*: aggregati cioè. pei quali, indicando con $g(z)$ la funzione di GREEN, relativa a un'area che non li contenga, singolare per $z = \infty$, il $\limsup$ di $|g(z) - \log|z||$ per $z = \infty$ è infinito. Allo studio particolareggiato di tali aggregati è destinato il capitolo V.

I cinque capitoli successivi sono destinati alla teoria delle funzioni meromorfe in un dominio che si può supporre senz'altro circolare, di raggio finito od infinito. Nello studio di queste funzioni hanno ufficio fondamentale talune funzioni-indici, $m(r, a)$, $N(r, a)$, $T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty)$ relative alla funzione meromorfa $w(z)$: la prima può considerarsi come indicatrice della frequenza con cui $w(z)$ si avvicina al valore a sulla circonferenza col centro nell'origine e raggio r , la seconda come indicatrice del numero dei punti interni alla detta circonferenza, in cui la funzione assume il valore a ; $T(r)$ si chiama *funzione caratteristica* di $w(z)$: l'A. chiama *primo teorema fondamentale* quello che assegna una limitazione alla differenza $|m(r, a) + N(r, a) - T(r)|$. Proprietà notevoli hanno le funzioni che, in un cerchio (cui si può attribuire il raggio 1) hanno caratteristica limitata (funzioni che l'A. chiama *di specie limitata* (*beschränktartige*)): esse sono caratterizzate dal fatto di potersi esprimere come rapporto di due funzioni limitate. Se la funzione $w(z)$ è meromorfa in tutto il piano $z \neq \infty$, non costante, la funzione caratteristica non può essere limitata: si presenta allora naturale la classificazione di dette funzioni secondo il modo di crescere del $\lim T(r)$ per $r \rightarrow \infty$: l'A. chiama di ordine finito quelle per cui è finito il $\lim (\log T(r) : \log r)$ e che egli suddivide poi ulteriormente in tipi: le funzioni d'ordine finito ammettono una rappresentazione come limite di rapporti di prodotti, analoghi alla rappresentazione per prodotti infiniti delle funzioni intere di genere finito: sotto convenienti condizioni si può sostituire al limite dei rapporti il rapporto dei limiti giungendo così infine alla generalizzazione della nozione del *genere* alle funzioni meromorfe.

L'importanza della nozione concretata nella funzione caratteristica emerge ancora in modo più saliente in quello che l'A. chiama il *secondo teorema fondamentale* il quale stabilisce una limitazione alla somma $\sum m(r, a_v)$ estesa ad un qualunque sistema, finito o infinito, di numeri a_v : associato al primo teorema, ne risulta precisata in modo notevole la distribuzione dei valori che può assumere una funzione meromorfa in tutto il piano $z \neq \infty$, in quanto il $\lim \frac{N(r, a)}{T(r)}$ per $r \rightarrow \infty$ può differire da 1 al più per un aggregato numerabile di valori di a , essendo la somma dei difetti

$\delta(a) = 1 - \overline{\lim} \frac{N(r, a)}{T(r)}$ estesa a quanti si vogliano valori di a , sempre ≤ 2 .

Gli ultimi tre capitoli trattano particolarmente delle funzioni rappresentabili sopra superficie di RIEMANN con diramazioni assegnate e delle ricerche topologiche di AHLFORS.

Chiude l'interessante volume un ricco indice bibliografico.

ellebbi

BIBLIOGRAFIA

Libri ricevuti.

ALBERT A. A. — *Modern Higher Algebra*. Chicago, University Press, 1937.

PETTERSON E. L. — *Ueber die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome*. (Inaugural Dissertation). Pagg. 96. Stockholm, Boktryckeri, 1936.

FORADORI E. — *Grundgedanken der Teiltheorie*. Pagg. 79. Leipzig, Hirzel, 1937.

TRICOMI F. — *Funzioni analitiche*. Bologna, Zanichelli, 1936, pagine 110+VIII.

— — *Funzioni ellittiche*. Bologna, Zanichelli, 1937, pagg. 274+XII.

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Berlin, Springer:

DOETSCH G. — *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Bd. XLVII), 1937, pagg. 436+XVI.

COURANT R. — HILBERT D. — *Methoden der Mathematischen Physik* (Bd. XLVIII), pagg. 560+XVI, 1938.

HILBERT D. — ACKERMANN W. — *Grundzüge der theoretischen Logik*. Bd. XXVII, 2^a ed., pagg. 133+VIII, 1938.

Actualités scientifiques et industrielles, Paris, Hermann, 1937:

DENJOY A. — *Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles*, parte I e II, pagg. 55 e 57.

LAVRENTIEFF M. — *Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes*, pagg. 62.

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin, Springer:

ERTEL H. — *Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie*. (Bd. V, H. 3), 1938, pagg. 122.