
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BEPPPO LEVI

Qualche considerazione di matematica finanziaria

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.1, p. 36–38.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_36_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_36_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_36_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Qualche considerazione di matematica finanziaria.

Nota di BEPPO LEVI (a Bologna).

Sunto. - *Considerazioni sulla caratterizzazione qualitativa di una funzione economico-finanziaria.*

La Nota precedente del prof. BONFERRONI ha dato luogo ad uno scambio di idee fra lui e me, di cui riassumo il mio punto di vista.

Trattandosi di assegnare condizioni *qualitative*, quanto possibile aderenti al problema finanziario, per caratterizzare la funzione $f(x)$, montante di una somma variabile x a una determinata scadenza, si può osservare che è naturale ammettere, con quell'approssimazione al vero che si può chiedere alla teoria, che il possessore di un capitale sia libero di metterlo a frutto frazionatamente (anche ammettendo, ove ne fosse il caso, che per qualche parte il montante corrispondente potesse essere nullo): che inoltre il montante sia sempre ≥ 0 . Il possessore della somma z dovrà quindi assumere come montante ottenibile da essa il limite superiore dei montanti ottenibili con qualsiasi frazionamento della medesima; e la funzione $f(x)$ dovrà perciò soddisfare alle condizioni

$$(1) \quad f(x) \geq 0 \quad \text{per } x \geq 0,$$

$$(2) \quad f(x) + f(y) \leq f(x + y)$$

per ogni coppia x, y di numeri ≥ 0 .

È pure naturale ammettere che la funzione $f(x)$ goda della semicontinuità superiore, e cioè non sia possibile aumentare il montante di una quantità finita col variare di infinitamente poco la somma impiegata. Da (1), (2) e da quest'ultima condizione segue che la $f(x)$ deve essere *continua a destra* per ogni valore di x .

Se inoltre, come il BONFERRONI nella Nota precedente, si pone il problema dello sconto, è chiaro che il creditore della somma differita z accederà a ricevere invece al momento attuale la somma x solo e sempre che

$$(3) \quad f(x) \geq z,$$

mentre il debitore della stessa somma z sarà disposto a pagare in cambio attualmente la somma x soltanto se

$$(4) \quad f(z - x) \geq f(z) - z;$$

ponendo $z - x = y$, da (3) e (4) si ricava

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y),$$

che insieme con (2) dà

$$(5) \quad f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Affinchè l'operazione di sconto possa avvenire, è dunque necessario che, essendo soddisfatta la (2) per ogni coppia x, y ($x, y \geq 0$), per ogni valore di z esista uno spezzamento $z = x + y$ ($x, y > 0$), pel quale si verifichi precisamente la (5).

È ora facile vedere che, in conseguenza delle condizioni accennate, $f(x)$ deve avere la forma $f(x) = kx$ (k costante positiva o nulla).

Invero il caso di $k = 0$ corrisponde alla soluzione evidente, ma senza significato finanziario, $f(x) = 0$.

Se esiste uno z per cui $f(z) > 0$, da (5) segue immediatamente che esiste almeno un x tale che

$$(6) \quad 0 < x < z, \quad \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(z)}{z}.$$

A causa della continuità a destra, se y è limite inferiore dell'aggregato dei punti x (> 0) per cui è verificata una disuguaglianza della forma $f(x) \geq kx$, è pure $f(y) \geq ky$: ma se $y > 0$, ciò contraddice a (6) perchè, ponendovi $z = y$, se ne ricava che esistono punti x ($0 < x < y$) che soddisfano alla stessa disuguaglianza. Ne segue che se esiste un punto z tale che $f(z) = kz$, il punto 0 è punto d'accumulazione di punti x per cui $f(x) \geq kx$.

Supponiamo ora, se possibile, che nell'intervallo $0^- z$ esista un punto ξ tale che $f(\xi) < k\xi$: posto $k_1 = f(\xi)/\xi < k$, per quanto abbiamo ora trovato, esiste un x_0 tale che

$$0 < x_0 \leq \frac{k - k_1}{k} \xi, \quad f(x_0) \geq kx_0.$$

Sia $\eta = \lambda x_0$ il massimo multiplo di x_0 minore o uguale a ξ e

$$\xi = \lambda x_0 + \delta, \quad (0 \leq \delta < x_0).$$

Per (2) si ha

$$\begin{aligned} f(\xi) &\geq f(\hat{\alpha}) + f(\lambda x_0) \geq \lambda f(x_0) \geq \lambda k x_0 = k(\xi - \hat{\alpha}) \\ &> k\xi - kx_0 > k\xi - (k - k_1)\xi = f(\xi), \end{aligned}$$

assurdo. Ne segue che la disuguaglianza

$$f(\xi) \geq k\xi$$

deve verificarsi per tutti i punti ξ dell'intervallo 0^-z . Ma se fra questi esistesse un punto ξ_0 per cui $f(\xi_0) > k\xi_0$, $\xi_0 < z$, ponendo in (2) $x = \xi_0$, $y = z - \xi_0$, a causa di $f(z - \xi_0) \geq k(z - \xi_0)$, si ottiene $f(z) > kz$, contro l'ipotesi. Risulta, come si voleva, per tutti i punti x dell'intervallo 0^-z ,

$$f(x) = kx.$$