
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO E. BONFERRONI

Intorno alle funzioni distributive su coppie particolari

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 17 (1938), n.1, p. 32–36.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_32_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_32_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Intorno alle funzioni distributive su coppie particolari.

Nota di CARLO E. BONFERRONI (a Firenze).

Sunto. - *L'A. stabilisce delle condizioni sufficienti affinchè una funzione $f(x)$, di cui è nota la proprietà distributiva per coppie x, y particolari, sia della forma kx (con k costante) e quindi sia distributiva per coppie arbitrarie. Mostra, poi, come il metodo usato possa servire anche per proprietà diverse da quella distributiva.*

1. Quando si lascino arbitrari i due numeri reali x, y , l'unica funzione *distributiva*, cioè soddisfacente all'equazione

$$(1) \quad f(x) + f(y) = f(x + y)$$

è, sotto condizioni ben note e molto larghe (p. es., che sia limitata in un intervallo qualsiasi; o, più in generale, che i valori assunti in un intervallo qualsiasi non s'addensino dappertutto nel campo reale; o che sia misurabile nel senso di LEBESGUE) la funzione kx , con k costante. Orbene, alla stessa conclusione si può giungere, con qualche ipotesi restrittiva, anche quando si sappia che la funzione è distributiva solo su coppie x, y particolari, nelle quali, cioè, la y è determinata dalla x in una certa corrispondenza.

Lo studio della (1) nelle condizioni ora dette è suggerito da considerazioni relative all'operazione finanziaria di sconto, come mostrerò brevemente in seguito.

Limitandoci al campo $x \geq 0$, porrò precisamente le seguenti condizioni:

- α) preso ad arbitrio z maggiore di zero, esistono due corrispondenti x, y maggiori di zero e di somma z ;
- β) la funzione $f(x)$ è continua per $x \geq 0$;
- γ) la funzione $f(x)$ è derivabile (a destra) nell'origine.

2. Consideriamo un punto $z > 0$ e l'estremo P dell'ordinata $f(z)$: per la condizione α, esiste una coppia di valori corrispondenti x, y maggiori di zero e di somma z , onde risulta $x < z, y < z$. (Ciò non

esclude che esistano altre coppie di somma z , e che una di queste sia la coppia $0, z$.

Il diagramma di $f(x)$, per x interno all'intervallo $(0, z)$, non può cadere tutto sopra (o sotto) la retta che congiunge l'origine O al punto P , perchè, essendo $x < z$, $y < z$, risulterebbe $f(x) + f(y)$ maggiore (o minore) di $f(x + y) = f(z)$, contro l'ipotesi che x, y verificchino la (1). Ne segue che la retta OP incontra il diagramma, fra O e P , in altri punti: e ciò perchè la differenza fra la funzione continua (condizione β) $f(x)$ e l'ordinata sino alla retta OP è anch'essa continua, e quindi non può cambiar segno senza annullarsi.

Formiamo, allora, la classe K dei punti *interni* al segmento OP e appartenenti al diagramma, ordinandoli come le loro ascisse: per tale classe il punto O è punto d'accumulazione. Supposto, infatti, che esista un segmento OS (a destra di O) non contenente punti di K , questa classe giacerebbe a destra di S e, per il fatto che $f(x)$ è continua, risulterebbe *chiusa*, onde ammetterebbe un minimo A , a destra di S . Ragionando su OA come poco fa su OP , si accerterebbe la presenza di un punto K minore di A (cioè del minimo). Pertanto, O è punto d'accumulazione.

Di qui segue, intanto, che il diagramma di $f(x)$, continuo e coincidente con la retta OP in punti che s'accumulano su O , contiene anche O , cioè che $f(0) = 0$. (Questa relazione, si noti, discenderebbe senz'altro dalla (1) se si sapesse che fra le coppie particolari x, y ve n'è una con $x = 0$).

Ne segue, inoltre, che la corda OP è una retta-limite della corda OM , quando M percorre il diagramma e tende ad O . Lo stesso dicasi di ogni altra corda uscente da O .

Se supponiamo (condizione γ) che $f(x)$ sia derivabile (a destra) nell'origine, cioè che OM ammetta una sola retta-limite, il diagramma non avrà punti fuori di OP e quindi sarà rettilineo. In altre parole, sarà $f(x) = kx$ (con k costante).

In modo analogo si ragionerebbe nel campo $x \leq 0$, giungendo alla stessa conclusione.

3. È facile mostrare che, senza le condizioni α , β e γ , la (1) può ammettere altre soluzioni.

a) Sia $f(x) = x^2$ nell'intervallo $(0, 1)$ e poi $f(x) = x$. Se è $z \geq 2$, si possono formare coppie x, y del tipo voluto dalla condizione α ; ma se è $z < 2$, tale possibilità viene a mancare. Pertanto, sono soddisfatte le condizioni β e γ , ma non la prima parte della α , perchè z non può prendersi ad arbitrio.

Oppure, sia $f(x)$ derivabile, ma non lineare, e sia $f(0) = 0$. Posto

$y = 0$ qualunque sia x , la (1) è soddisfatta. In tal caso, sono verificate le condizioni β e γ , ma non è verificata la seconda parte della α : si può, infatti, ottenere z come somma di due corrispondenti x , y , ma questi non sono entrambi maggiori di zero.

b) Sia $f(x)$ la mantissa di x , cioè la differenza fra x e la sua parte intera: sarà $f(x) = x$ in $(0, 1)$ e poi si riprodurrà periodicamente in $(1, 2)$, $(2, 3)$, ecc.. Preso $z = n + \theta$, con n intero e $0 \leq \theta < 1$, si consideri $z_0 = \theta$ e lo si spezzi nella somma di x e y_0 , presi in $(0, 1)$: assumendo $y = y_0 + n$, risulterà

$$x + y = x + y_0 + n = z_0 + n = z,$$

$$f(x) + f(y) = f(x) + f(y_0) = f(x + y_0) = f(z_0) = f(z) = f(x + y).$$

Saranno così soddisfatte le condizioni α e γ , ma non la β , perchè $f(x)$ è discontinua nei punti 1, 2, 3, ecc..

c) Si considerino i punti d'ascissa 2^n , con $n = 0, \pm 1, \pm 2$, ecc.: si tracci una retta r per O e sull'intervallo $(1, 2)$ si definisca $f(x)$ in modo che sia continua, ma non lineare, e che gli estremi dell'arco diagramma cadano su r : poi in $(2, 4)$, $(4, 8)$, ecc., si riproduca il diagramma in scala doppia, quadrupla, ecc., e in $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, ecc., in scala metà, un quarto, ecc.. La funzione $f(x)$ così definita, quando si ponga $f(0) = 0$, risulta continua anche per $x = 0$ e soddisfa ovviamente alla condizione

$$2f(x) = f(2x).$$

Definita la corrispondenza fra x e y mediante la condizione $y = x$, ne segue

$$f(x + y) = f(2x) = 2f(x) = f(x) + f(y).$$

Siccome $x + y$, cioè $2x$, assume ogni valore z , si riconosce che la condizione α è soddisfatta.

Così pure è soddisfatta la β , ma non lo è la γ , perchè la corda OM riproduce, in ogni intervallo $(2^n, 2^{n+1})$, le medesime oscillazioni, e quindi non tende a limite quando M tende ad O .

4. Il metodo esposto può essere applicato, con le debite modificazioni ed ipotesi, anche ad equazioni funzionali diverse dalla (1) ed appartenenti al tipo generale

$$(2) \quad F[x, y, f(x), f(y)] = f(z): \quad z = \varphi(x, y)$$

dove le funzioni F e φ sono assegnate. Mi riservo di ritornare in altra Nota su questa equazione e di mostrare come, in dipendenza di certe sue proprietà, si possano assegnare condizioni sufficienti (analoghe alle α , β e γ : talvolta meno, tal'altra più restrittive)

affinchè $f(x)$, soluzione di (2) per coppie particolari, lo sia anche per coppie arbitrarie (in un certo campo): qui mi limiterò ad un esempio, che parmi sufficiente ad indicare quali siano gli elementi essenziali del procedimento. Consideriamo l'equazione

$$(3) \quad f(x) + f(y) = f(xy), \quad [x > 0, y > 0]$$

e studiamola direttamente, invece di ricondurla alla (1) con la sostituzione $x = e^u$, $y = e^v$. Qui le soluzioni continue, lasciando x e y arbitrari, sono della forma $k \log x$; esse costituiscono un fascio di curve con centro nel punto $U(1, 0)$; per un punto generico P (diverso da U) ne passa una e, infine, nel punto U due distinte linee hanno *distinte tangenti*.

Nel campo $x \geq 1$, qualunque $z > 1$ si ottiene come prodotto xy con $1 < x < z$, $1 < y < z$, e il diagramma di $f(x)$ in $(1, z)$ non può stare tutto al disopra (o al disotto) di quella linea del fascio che passa per l'estremo P di $f(z)$. Ammesso che $f(x)$ sia continua per $x \geq 1$ e derivabile (a destra) per $x = 1$, si conclude che $f(1) = 0$, che $f(x)$ è anch'essa della forma $k \log x$ e, quindi, che soddisfa alla (1) per coppie arbitrarie.

Lo stesso dicasi se il campo considerato è il campo $0 < x \leq 1$.

5. Venendo ad un problema di sconto, esprima $f(x)$ il montante del capitale x (a parità di periodo d'investimento e d'ogni altro elemento da cui il montante dipende): sulla somma z un debitore pretenderà, per anticiparla ⁽¹⁾, uno sconto x che renda

$$f(x) = f(z) - z$$

e il creditore, se investe alle stesse condizioni, esigerà che sia

$$f(z - x) = z.$$

Queste due equazioni debbono definire per ogni z lo stesso valore di x , affinchè i due punti di vista si equivalgano. Dalle stesse, sommando e indicando con $y = z - x$ la somma scontata, segue

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Questa eguaglianza deve sussistere *non per valori x, y arbitrari* (nel qual caso, come ho ricordato in principio di questa Nota, non sarebbe necessario uno studio apposito), ma, corrispondentemente ad ogni valore di z , per una conveniente coppia di valori x, y che si potrà determinare a posteriori quando la funzione $f(x)$ sia

⁽¹⁾ V. i miei *Fondamenti di Matematica attuariale*, Firenze, Libreria Le Monnier, 1933, p. 14; e anche « *Giornale di Matematica finanziaria* » ottobre 1923, p. 216 e febbraio 1926, p. 46.

nota. Si cade, così, proprio nella questione dianzi trattata. Ora, il problema esige che ogni somma z ammetta sconto x ; cioè che sia verificata la condizione α ; se aggiungiamo le condizioni β e γ , possiamo concludere che l'unica soluzione è la $f(x) = kx$, cioè che *il montante dev'essere proporzionale al capitale impiegato*.

Quanto alle condizioni β e γ , che non sono di natura strettamente finanziaria, sarebbe interessante sostituirle con altre, analiticamente meno restrittive: p. es., si può sostituire β con l'ipotesi che $f(x)$ abbia primitiva e sia continua a destra.