
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO MAMBRIANI

Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.1, p. 26–32.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_26_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_26_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali.

Nota di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *Applicando un procedimento — già indicato dall'A. — per la risoluzione di equazioni differenziali lineari, s'individuano diverse equazioni differenziali, lineari ed omogenee, aventi fra le loro soluzioni dei polinomi e si dànno con facilità delle espressioni di tali polinomi.*

Facendo seguito ad un mio precedente lavoro ⁽¹⁾ nel quale esponevo un procedimento per la risoluzione di equazioni differenziali lineari, individuo ora agevolmente — applicando tale procedimento

⁽¹⁾ *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari*, « Atti I° Congresso Naz. dei Matematici in Firenze », aprile 1937 (in corso di stampa).

— diverse equazioni differenziali, lineari ed omogenee, aventi fra le loro soluzioni dei polinomi. Inoltre, detto procedimento — venendo a soccorso del metodo dei coefficienti indeterminati che darebbe qui luogo a calcoli alquanto laboriosi — mi conduce contemporaneamente, senza difficoltà, a concise espressioni dei detti polinomi mediante i simboli di derivazione ed integrazione: riesce poi molto facile, nei diversi casi particolari, l'esecuzione delle operazioni indicate.

1. TEOREMA I. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'equazione differenziale lineare del tipo*

$$(1) \quad L[y] \equiv p_{m-1}y^{(m)} + p_{m-2}y^{(m-1)} + \dots + p_2y''' + p_1y'' + (a_1x + b_1)y' + (a_0x + b_0)y = 0$$

— dove $p_{m-1}, p_{m-2}, \dots, p_2, p_1$ sono polinomi qualunque, nella x , di gradi al più uguali ai rispettivi indici e a_1, b_1, a_0, b_0 sono delle costanti con $a_0x + b_0 \neq 0$ — abbia fra le sue soluzioni dei polinomi di grado prefissato n , è che sia

$$(2) \quad \begin{cases} a_0 = 0, \\ b_0 = -na_1, \end{cases}$$

cioè che (1) abbia la forma

$$(3) \quad p_{m-1}y^{(m)} + p_{m-2}y^{(m-1)} + \dots + p_2y''' + p_1y'' + (a_1x + b_1)y' - na_1y = 0$$

con $a_1 \neq 0$. Uno di questi polinomi è

$$(4) \quad y_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^v}{a_1^v} \left\{ \frac{x^n I x^{-n-1} (p_{m-1}D^m + p_{m-2}D^{m-1} + \dots + p_1D^2 + b_1D)}{a_1^v} \right\} x^n,$$

dove $x^n I x^{-n-1} (p_{m-1}D^m + p_{m-2}D^{m-1} + \dots + p_1D^2 + b_1D)$ è un'operazione nella quale D è la derivazione rispetto ad x e I è l'operazione distributiva definita da $Ix^v = (v+1)^{-1}x^{v+1}$ per $v \neq -1$ (¹); ed ogni altra soluzione polinomiale di (3) è linearmente dipendente da tale $y_n(x)$.

DIMOSTRAZIONE. — 1°) La (2) è necessaria, come sopra si è asserito: ciò segue dal notare che $L[x^v]$, ($v=0, 1, 2, \dots$) risulta un polinomio di grado $\leq v+1$ e che $L[\alpha x'' + \beta x^{n-1}]$ ha i seguenti due termini di grado più elevato:

$$\alpha a_0 x^{n+1} + [x(na_1 + b_0) + \beta a_0] x^n,$$

(¹) La sottolineatura ha l'ufficio principale di contrassegnare i simboli operatori un po' complicati che potrebbero eventualmente interpretarsi anche in modo non operatorio (si confronti il mio lavoro citato a pag. 26).

i quali debbono essere $= 0$ se $2x^n + 3x^{n-1}$ sono i termini di grado massimo di un polinomio soluzione.

2°) La (2) è pure sufficiente. Invero, la (3) si può ora scrivere:

$$(p_{m-1}y^{(m)} + p_{m-2}y^{(m-1)} + \dots + p_2y''' + p_1y'' + b_1y') + a_1(xy' - ny) = 0$$

ossia

$$(3') \quad \underline{(p_{m-1}D^m + p_{m-2}D^{m-1} + \dots + p_2D^3 + p_1D^2 + b_1D)y} + a_1x^{n+1}Dx^{-n}y = 0,$$

e, per essere $a_1 \neq 0$, invertendo in (3') l'operazione $\underline{a_1x^{n+1}Dx^{-n}}$, s'ottiene:

$$(3'') \quad \underline{a_1^{-1}x^nLx^{-n-1}(p_{m-1}D^m + p_{m-2}D^{m-1} + \dots + p_1D^2 + b_1D)y} + y = cx^n,$$

dove c è una costante arbitraria. Ora la (3''), e quindi la (3), ha la soluzione formale

$$(4') \quad y = c \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{a_1^v} \left[\underline{x^nLx^{-n-1}(p_{m-1}D^m + p_{m-2}D^{m-1} + \dots + p_1D^2 + b_1D)} \right]^v x^n,$$

e questa y è anche soluzione effettiva di (3) in quanto nella serie precedente i termini corrispondenti a $v = n+1, n+2, \dots$ sono tutti nulli: questo risulta notando che

$$\begin{aligned} \underline{x^nLx^{-n-1}(p_{m-1}D^m + p_{m-2}D^{m-1} + \dots + p_1D^2 + b_1D)} &\equiv \\ &\equiv \underline{x^nLx^{-n-1}(p_{m-1}D^{m-1} + p_{m-2}D^{m-2} + \dots + p_1D + b_1D)}, \end{aligned}$$

dove l'operazione $\underline{p_{m-1}D^{m-1} + p_{m-2}D^{m-2} + \dots + p_1D + b_1}$ muta un polinomio intero in x in un polinomio di grado uguale o minore e l'operazione $\underline{x^nLx^{-n-1}}$ muta un polinomio di grado $\neq n$ in un altro dello stesso grado: perciò nel secondo membro di (4'), notato che il termine corrispondente a $v=0$ è cx^n , risulta che il termine corrispondente a $v=1$ è un polinomio di grado $\leq n-1$, quello corrispondente a $v=2$ è un polinomio di grado $\leq n-2$, e così via, quello corrispondente a $v=n$ è una costante ed infine quelli corrispondenti a $v \geq n+1$ sono tutti nulli. La funzione y data da (4') è quindi un polinomio di grado n e precisamente per $c=1$ il polinomio $y_n(x)$ dato da (4).

3°) Resta da provare che l'equazione (3) non ha soluzioni polinomiali linearmente indipendenti da $y_n(x)$. Anzitutto la (3) non può avere come soluzione un polinomio di grado $r \neq n$, perchè non può essere $ra_1 = na_1$ con $a_1 \neq 0$. La (3) non può avere, poi, come soluzione un polinomio $Y_n(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$ pure di grado n e linearmente indipendente da $y_n(x)$, perchè allora $Y_n(x) - c_0y_n(x)$

sarebbe un polinomio non identicamente nullo e di grado $r \neq n$ (al massimo di grado $n-1$) soluzione di (1), contrariamente alla conclusione precedente.

Il teorema è così dimostrato.

ESEMPIO. — L'equazione

$$\frac{x^{n-1}}{n!} y^{(n)} + \frac{x^{n-2}}{(n-1)!} y^{(n-1)} + \dots + \frac{x}{2!} y'' + (ax+1)y' - nay = 0 \quad (a \neq 0)$$

ha (come s'ottiene facilmente applicando (4)) la soluzione polinomiale

$$\begin{aligned} y_n(x) = x^n + \frac{1}{a}(2^n - 1)x^{n-1} + \frac{1}{2!a^2}(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)x^{n-2} + \dots + \\ + \frac{1}{(n-1)!a^{n-1}}(2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^2 - 1)x + \\ + \frac{1}{n!a^n}(2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^2 - 1)(2^1 - 1), \end{aligned}$$

e ogni altra sua soluzione polinomiale è linearmente dipendente da tale $y_n(x)$.

COROLLARIO. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una equazione di Laplace, di un ordine m qualunque,*

$$(a_m x + b_m)y^{(m)} + (a_{m-1}x + b_{m-1})y^{(m-1)} + \dots + (a_1x + b_1)y' + (a_0x + b_0)y = 0,$$

con $a_0x + b_0 \neq 0$, abbia fra le sue soluzioni un polinomio di grado prefissato n , è che sia della forma

$$(a_m x + b_m)y^{(m)} + (a_{m-1}x + b_{m-1})y^{(m-1)} + \dots + (a_1x + b_1)y' - na_1y = 0,$$

con $a_1 \neq 0$. L'espressione di questo polinomio si ottiene poi da (4) ⁽¹⁾. Interessa notare che dal teorema precedente risulta ancora:

Un'equazione di Laplace, qualunque ne sia l'ordine, non può avere due soluzioni polinomiali fra loro linearmente indipendenti.

2. TEOREMA II. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione differenziale lineare del tipo*

$$(5) \quad \mathcal{L}[y] \equiv (a_m x^m + p_{m-1})y^{(m)} + (a_{m-1}x^{m-1} + p_{m-2})y^{(m-1)} + \dots + (a_2x^2 + p_1)y'' + (a_1x + p_0)y' + a_0y = 0$$

— dove $p_{m-1}, p_{m-2}, \dots, p_1, p_0$ sono polinomi qualunque nella x ,

(¹) Nel caso $m=2$ si confronti il mio lavoro: *Sulla determinazione della soluzione polinomiale dell'equazione $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$* , « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, Vol. VIII (1938) (in corso di stampa).

di gradi al più uguali ai rispettivi indici, e $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ sono delle costanti — abbia fra le sue soluzioni un polinomio, è che l'equazione algebrica

$$(6) \quad f(r) \equiv a_m r(r-1) \dots (r-m+1) + a_{m-1} r(r-1) \dots (r-m+2) + \dots + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

abbia fra le sue radici un intero non negativo. Inoltre, se n è la minore delle radici intere non negative di (6), la (5) ha fra le sue soluzioni uno e un solo polinomio $y_n(x)$ di grado n ⁽¹⁾ e non ha soluzioni polinomiali di grado $< n$; se poi n è l'unico intero non negativo radice di (6), la (5) ha l'unica ⁽²⁾ soluzione polinomiale $y_n(x)$.
Risulta:

$$(7) \quad y_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^v}{a_\mu^v} \left\{ x^n Ix^{r_2-n-1} Ix^{r_3-r_2-1} \dots \right. \\ \left. \dots Ix^{r_\mu-r_{\mu-1}-1} Ix^{-r_\mu-1} (p_{m-1} D^m + p_{m-2} D^{m-1} + \dots + p_1 D^2 + p_0 D) \right\}^v x^n,$$

indicando con a_μ il primo non nullo dei coefficienti $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ e con $r_2, r_3, \dots, r_\mu$ le altre radici di (6).

DIMOSTRAZIONE. — 1°) La condizione che (6) abbia una radice intera non negativa è necessaria, come sopra si è asserito: ciò segue dal notare che $\mathcal{L}[x^v]$ risulta un polinomio di grado $\leq v$, col termine in x^v dato da $f(v)x^v$.

2°) La condizione detta è pure sufficiente. Invero, nella (5), che si può scrivere sotto la forma

$$(p_{m-1} D^m + p_{m-2} D^{m-1} + \dots + p_1 D^2 + p_0 D)y + \\ + (a_\mu x^\mu D^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} D^{\mu-1} + \dots + a_1 D + a_0)y = 0,$$

ed anche ⁽³⁾, detta n la minore delle radici intere non negative di (6),

$$(5') \quad (p_{m-1} D^m + p_{m-2} D^{m-1} + \dots + p_1 D^2 + p_0 D)y + \\ + a_\mu x^{1+r_\mu} D x^{1+r_{\mu-1}-r_\mu} \dots D x^{1+r_2-r_3} D x^{1+n-r_2} D x^{-n} y = 0,$$

si può invertire l'operazione

$$a_\mu x^{1+r_\mu} D x^{1+r_{\mu-1}-r_\mu} \dots D x^{1+r_2-r_3} D x^{1+n-r_2} D x^{-n},$$

(1) A prescindere dai polinomi che differiscono da $y_n(x)$ per una costante moltiplicativa.

(2) Idem come a (1).

(3) Cfr. loc. cit. nella annotazione di pag. 26.

e allora da (5') s'ottiene:

$$(5'') \quad \frac{a_\mu^{-1} x^n Ix^{r_2-n-1} Ix^{r_3-r_2-1} \dots}{\dots Ix^{r_\mu-r_{\mu-1}-1} Ix^{-r_\mu-1} (p_{m-1} D^m + p_{m-2} D^{m-1} + \dots + p_1 D^2 + p_0 D)} y + y = \\ = c_1 x^n + c_2 x^n Ix^{r_2-n-1} + c_3 x^n Ix^{r_2-n-1} Ix^{r_3-r_2-1} + \dots + \\ + c_\mu x^n Ix^{r_2-n-1} \dots Ix^{r_\mu-r_{\mu-1}-1}$$

con $c_1, c_2, c_3, \dots, c_\mu$ costanti arbitrarie. Pel nostro scopo in (5'') faremo $c_2 = c_3 = \dots = c_\mu = 0$ e noteremo che è soluzione formale di (5''), e quindi di (5), la

$$(7') \quad y = c_1 \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{a_\mu^v} \left\{ \frac{x^n Ix^{r_2-n-1} Ix^{r_3-r_2-1} \dots}{\dots Ix^{r_\mu-r_{\mu-1}-1} Ix^{-r_\mu-1} (p_{m-1} D^m + p_{m-2} D^{m-1} + \dots + p_1 D^2 + p_0 D)} \right\}^v x^n;$$

questa y è anche soluzione effettiva di (5) in quanto nel secondo membro di (7') i termini corrispondenti a $v = n+1, n+2, \dots$ sono tutti nulli, il che si stabilisce ragionando in modo analogo a quanto si è fatto nel n.º 1: da tale ragionamento appare l'opportunità che n sia la minore delle radici intere non negative di $f(r) = 0$, in quanto si ha

$$\frac{x^n Ix^{r_2-n-1} Ix^{r_3-r_2-1} \dots Ix^{r_\mu-r_{\mu-1}-1} Ix^{-r_\mu-1}}{f(v)} x^v = \frac{x^v}{f(v)}.$$

Per $c_1 = 1$ la y data da (7') è quindi il polinomio $y_n(x)$ dato da (7).

3º) Per provare, infine, che non vi sono altri polinomi di grado n , indipendenti linearmente da $y_n(x)$, soluzioni di (5), basta fare un ragionamento analogo a quello fatto a 3º) nel teorema I. Se vi fosse un polinomio $Y_n(x) = k_0 x^n + k_1 x^{n-1} + \dots + k_n$ linearmente indipendente da $y_n(x)$ e soluzione di (5), la differenza $Y_n(x) - k_0 y_n(x)$ sarebbe un polinomio di grado $r < n$, soluzione di (5) e ciò è in contrasto con l'ipotesi che n sia la minore delle radici intere non negative di (6). Le altre asserzioni fatte nel teorema risultano subito.

Il teorema è quindi dimostrato.

3. OSSERVAZIONE. — Le precedenti espressioni dei polinomi posti in evidenza si possono poi mutare di forma in armonia a specializzazioni od ipotesi sui coefficienti dell'equazione differenziale ed allo studio che si vuole fare su questi polinomi; e tali

mutamenti si potranno eseguire conformemente a quanto già ebbi ad indicare ⁽¹⁾ nel caso di un'equazione del 2° ordine del tipo di LAPLACE. Così, qualora ci si ponga nel campo reale, possono interessare quelle espressioni dei polinomi soluzioni che, ad esempio, più s'addicono a decidere sulla realtà delle radici di tali polinomi.

(1) Loc. cit. nella annotazione di pag. 29.