
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BENIAMINO SEGRE

Sulla totalità degli spazi di
dimensione massima giacenti su di
una quadrica di S_n , con particolare
riguardo al caso $n = 7$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.1, p. 1–14.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_1_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_1_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_1_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

PICCOLE NOTE

Sulla totalità degli spazi di dimensione massima giacenti su di una quadrica di S_n , con particolare riguardo al caso di $n=7$.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna)

Sunto. - La suddetta totalità risulta lineare per $n \leq 5$ e non lineare per $n \geq 6$; in particolare essa è quadratica per $n=6, 7$. In quest'ultimo caso, la rappresentazione coi punti di una V_6^2 è proiettivamente determinata, e gode di molteplici proprietà che qui vengono studiate.

È noto che gli spazi lineari di dimensione massima giacenti su di una quadrica $\mathcal{Q}$ di S_n sono a $k + \varepsilon - 1$ dimensioni, se $n = 2k + \varepsilon$, $\varepsilon = 0$ od 1 , e costituiscono uno o due diversi sistemi continui $\infty^{\frac{1}{2}k(k+1)}$ a seconda che n è pari ($\varepsilon = 0$) o dispari ($\varepsilon = 1$). Un sistema continuo Σ siffatto è in ogni caso razionale, come agevolmente si desume col metodo d'induzione completa dalla proiezione stereografica di $\mathcal{Q}$; ed è facile vedere, di più, che per $n \leq 5$ Σ risulta lineare [ossia riferibile birazionalmente senza eccezioni ai punti di uno spazio lineare di dimensione $\frac{1}{2}k(k+1)$], ciò che in detta ipotesi facilita grandemente lo studio del gruppo delle collineazioni trasformanti $\mathcal{Q}$ in se stessa (gruppo isomorfo, per ogni n , a quello delle sostituzioni ortogonali su $n+1$ variabili).

Quest'ultima notevole semplificazione viene per contro a mancare se $n \geq 6$. Basta infatti osservare che i due sistemi continui costituiti dagli spazi di Σ uscenti da due punti non coniugati di $\mathcal{Q}$ hanno allora dimensioni, entrambe uguali a $\frac{1}{2}k(k-1)$, la cui somma δ^3 non inferiore alla dimensione di Σ ; e, poichè i due sistemi suddetti sono manifestamente privi di elementi comuni, resta conseguentemente escluso che Σ possa essere lineare.

Si pone perciò la questione di determinare una varietà algebrica priva di punti multipli e d'ordine minimo alla quale Σ

possa venir riferito birazionalmente senza eccezioni ⁽¹⁾. Possiamo subito notare che i due casi di $\varepsilon=0$ e di $\varepsilon=1$ relativi ad uno stesso valore di k conducono ad una medesima varietà d'ordine minimo; invero, si ottiene una corrispondenza birazionale senza eccezioni fra i sistemi Σ di una V^2_{2k-1} e di una V^2_{2k} non specializzate, assumendo la prima di queste come sezione iperpiana della seconda, ed associando fra loro spazi S_{k-1} ed S_k dei detti sistemi che si appartengano. Il problema proposto appare però tutt'altro che facile per valori elevati di k ; perciò qui ci limiteremo ad approfondirlo nel più semplice caso non lineare, corrispondente a $k=3$. La varietà richiesta è allora una quadrica; e la possibilità che ne risulta di *rappresentare birazionalmente senza eccezioni gli S_3 di un sistema di una V_6^2 non specializzata coi punti di un'altra V_6^2* (eventualmente sovrapposta alla prima), porta già a sviluppi ed applicazioni non privi d'interesse ed eleganza.

§ I. DEFINIZIONE ANALITICA DI UNA NOTEVOLE CORRISPONDENZA
FRA DUE QUADRICHE NON SPECIALIZZATE DI S_7 .

1. Consideriamo le forme:

$$Q = \sum_{i=0}^3 x_i y_i, \quad Q' = \sum_{i=0}^3 x'_i y'_i,$$

$$\begin{aligned} L_0 &= x_0 y'_0 + x_1 y'_1 + x_2 y'_2 + x_3 y'_3, & M_0 &= y_0 x'_0 + y_1 x'_1 + y_2 x'_2 + y_3 x'_3, \\ L_1 &= x_0 x'_1 - x_1 x'_0 + y_2 y'_3 - y_3 y'_2, & M_1 &= y_0 y'_1 - y_1 y'_0 + x_2 x'_3 - x_3 x'_2, \\ L_2 &= x_0 x'_2 - x_2 x'_0 + y_3 y'_1 - y_1 y'_3, & M_2 &= y_0 y'_2 - y_2 y'_0 + x_3 x'_1 - x_1 x'_3, \\ L_3 &= x_0 x'_3 - x_3 x'_0 + y_1 y'_2 - y_2 y'_1, & M_3 &= y_0 y'_3 - y_3 y'_0 + x_1 x'_2 - x_2 x'_1, \end{aligned}$$

ed osserviamo che il sistema da esse costituito non si altera se:

a) si tien fisso dappertutto l'indice 0 e si permutano 1, 2, 3 circolarmente; oppure

b) si scambiano fra loro x_i ed y_i , x'_i ed y'_i , L_i ed M_i (per $i=0, 1, 2, 3$), fisse restando Q e Q' ; oppure

c) si scambiano fra loro x_i ed x'_i , y_i ed y'_i , Q e Q' , L_0 ed M_0 , mutando solo i segni delle $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3$.

(1) Il corrispondente ordine minimo è quello che denominasi l'ordine invariante relativo di Σ : cfr. F. SEVERI, *Conferenze di Geometria algebrica*, Raccolte da B. SEGRE (Roma 1927-29), p. 64. Si ottiene subito un modello proiettivo privo di punti multipli di Σ , considerando l'immagine di Σ sulla grassmanniana con cui si rappresentano gli $S_{k+\varepsilon-1}$ di S_n ; tale modello non risulta però d'ordine minimo, come tosto si vede per i primi valori di n (per $n=7$ cfr. il n. 10).

Fra le forme introdotte sussistono le identità:

$$(1) \begin{cases} x_0 Q' = x_0' L_0 + y_1' L_1 + y_2' L_2 + y_3' L_3, & y_0 Q' = y_0' M_0 + x_1' M_1 + x_2' M_2 + x_3' M_3, \\ x_1 Q' = x_1' L_0 - y_0' L_1 - y_3' M_2 + y_2' M_3, & y_1 Q' = y_1' M_0 - x_0' M_1 - x_3' L_2 + x_2' L_3, \\ x_2 Q' = x_2' L_0 - y_0' L_2 - y_1' M_3 + y_3' M_1, & y_2 Q' = y_2' M_0 - x_0' M_2 - x_1' L_3 + x_3' L_1, \\ x_3 Q' = x_3' L_0 - y_0' L_3 - y_2' M_1 + y_1' M_2, & y_3 Q' = y_3' M_0 - x_0' M_3 - x_1' L_1 + x_1' L_2, \end{cases}$$

di cui basta p. es. verificare le prime due a sinistra, dato che da queste discendono le due successive in virtù di a), dalle 4 relazioni così ottenute deducendosi poi le altre 4 mediante b); da quelle 8 identità se ne possono naturalmente trarre 8 ulteriori, applicando c). Ne consegue che, se valgono le

$$(2) \quad L_0 = L_1 = L_2 = L_3 = M_0 = M_1 = M_2 = M_3 = 0$$

per valori non tutti nulli delle 8 variabili (x, y) o delle (x', y') , le 8 variabili rimanenti debbono rispettivamente verificare la $Q' = 0$ o la $Q = 0$.

Mostriamo che, fissati comunque 8 numeri (x', y') non tutti nulli soddisfacenti alla $Q' = 0$, delle 8 equazioni (2) [lineari ed omogenee nelle (x, y) e, per quanto s'è detto, aventi come conseguenza la $Q = 0$] precisamente 4 risultano linearmente indipendenti. Avuto riguardo ad a), b) ed all'ipotesi che le (x', y') siano non tutte nulle, si potrà intanto senza restrizione supporre $x_0' \neq 0$ oppure $x_1' \neq 0$. Nel primo caso le equazioni

$$(3) \quad M_0 = L_1 = L_2 = L_3 = 0$$

sono linearmente indipendenti, in quanto ordinatamente contengono una ed una sola delle variabili y_0, x_1, x_2, x_3 (col coefficiente non nullo $\pm x_0'$); e le (3) traggono seco di conseguenza le equazioni (2) restanti, come si desume dalle 4 identità (1) che contengono a primo membro una delle x_0, y_1, y_2, y_3 , ricordando che per ipotesi è $Q' = 0$, $x_0' \neq 0$. Se invece si suppone $x_1' \neq 0$, risultano linearmente indipendenti le

$$(4) \quad M_0 = L_1 = M_2 = M_3 = 0,$$

che ordinatamente contengono una ed una sola delle variabili y_1, x_0, x_3, x_2 (col coefficiente non nullo $\pm x_1'$); e da queste discendono come conseguenze le equazioni (2) rimanenti, in base alle 4 identità (1) in cui a primo membro figura una delle x_1, y_0, y_2, y_3 .

Notiamo infine che le (2), in corrispondenza a due gruppi di valori non tutti nulli delle (x', y') , soddisfacenti alla $Q' = 0$ ma fra loro non proporzionali, forniscono certo due sistemi di equazioni lineari omogenee nelle (x, y) non aventi le medesime so-

luzioni. Bastano infatti già le equazioni (3) [o le (4)] insieme alla $Q'=0$, per individuare i rapporti delle (x', y') alla x_0' [od alla x_1'], supposta non nulla.

In virtù di c), è lecito scambiare dappertutto nelle precedenti deduzioni le lettere accentate colle non accentate.

2. Gli sviluppi del n. 1 ammettono un'ovvia interpretazione geometrica, ove si assumano le (x, y) e le (x', y') come coordinate proiettive omogenee di punto in due spazi lineari a 7 dimensioni. Le $Q=0$, $Q'=0$ sono allora le equazioni di due quadriche non specializzate di tali iperspazi, che rispettivamente denomineremo $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$; e le (2) rappresentano in modo completo una corrispondenza puntuale ∞^6 fra $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$, che indicheremo con Ω , associante — ad ogni punto di una qualunque di tali quadriche — tutti e soli i punti di un determinato spazio a 3 dimensioni dell'altra ⁽²⁾.

Quando un punto P (o P') varia su $\mathcal{Q}$ (su $\mathcal{Q}'$), lo spazio S_3' (S_3) luogo dei punti omologhi di $\mathcal{Q}'$ (di $\mathcal{Q}$) descrive uno, Σ' (Σ), dei due sistemi continui ∞^6 di spazi esistenti su questa quadrica; fra tale sistema e $\mathcal{Q}$ (e $\mathcal{Q}'$) intercede così un riferimento birazionale senza eccezioni, che designeremo con Ω_0 (con Ω'_0). È chiaro che, variando P su di uno spazio S_3 comunque fissato di Σ , lo spazio S_3' di Σ' che corrisponde al primo in virtù di Ω_0 passa sempre per il punto P' di $\mathcal{Q}'$ omologo di S_3 secondo Ω'_0 .

3. Siano Θ , Θ' gli altri due sistemi ∞^6 di spazi rispettivamente esistenti su $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$. Poichè un'omologia armonica trasformante in sè $\mathcal{Q}'$ (ad esempio quella rappresentabile analiticamente collo scambio di x_0' , y_0') muta Σ' in Θ' , così — in base al n. 1 — tutti gli spazi T_3' di quest'ultimo sistema sono rappresentati (ciascuno una volta sola) dalle equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} u_0x_0' + u_1y_1' + u_2y_2' + u_3y_3' = 0, & v_0y_0' + v_1x_1' + v_2x_2' + v_3x_3' = 0, \\ u_0x_1' - u_1y_0' + v_2y_3' - v_3y_2' = 0, & v_0y_1' - v_1x_0' + u_2x_3' - u_3x_2' = 0, \\ u_0x_2' - u_2y_0' + v_3y_1' - v_1y_3' = 0, & v_0y_2' - v_2x_0' + u_3x_1' - u_1x_3' = 0, \\ u_0x_3' - u_3y_0' + v_1y_2' - v_2y_1' = 0, & v_0y_3' - v_3x_0' + u_1x_2' - u_2x_1' = 0, \end{cases}$$

al variare dei parametri omogenei (u, v) legati dalla $\sum_{i=0}^3 u_i v_i = 0$.

Un facile calcolo mostra che ai singoli punti P' dello spazio T_3' di Θ' rappresentato dalle (5) corrispondono biunivocamente, in

⁽²⁾ Nel seguito, per brevità, useremo la semplice denominazione di « spazio, » per indicare uno spazio a 3 dimensioni.

virtù di Ω_0' , gli $\infty^3 S_3$ che si appoggiano secondo piani allo spazio fisso T_3 di Θ avente le equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} v_0x_0 + u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = 0, & u_0y_0 + v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0, \\ v_0x_1 - u_1y_0 + v_2y_3 - v_3y_2 = 0, & u_0y_1 - v_1x_0 + u_2x_3 - u_3x_2 = 0, \\ v_0x_2 - u_2y_0 + v_3y_1 - v_1y_3 = 0, & u_0y_2 - v_2x_0 + u_3x_1 - u_1x_3 = 0, \\ v_0x_3 - u_3y_0 + v_1y_2 - v_2y_1 = 0, & u_0y_3 - v_3x_0 + u_1x_2 - u_2x_1 = 0; \end{cases}$$

e, poichè si passa dalle (5) alle (6) e viceversa mediante il semplice scambio delle (x_i, y_i) colle (x'_i, y'_i) e di u_0 con v_0 , ne consegue che la relazione fra T_3 e T'_3 è scambievole, ossia che — quando P varia su T_3 — lo spazio S'_3 che gli corrisponde secondo Ω_0 si mantiene appoggiato a T'_3 lungo un piano.

Fra i sistemi Θ e Θ' resta in definitiva indotta — nel modo anzi detto — una corrispondenza birazionale senza eccezioni, che indicheremo con Ω_3 . È chiaro che Ω subordina una determinata reciprocità fra due qualunque spazi T_3, T'_3 che si corrispondano in Ω_3 , nella quale ogni punto P di T_3 ha per omologo il piano secondo cui si appoggia a T'_3 lo spazio S'_3 associato a P in virtù di Ω_0 .

§ II. STUDIO GEOMETRICO DELLA CORRISPONDENZA DIANZI DEFINITA.

4. Conservando le notazioni del § I, fissiamo una qualunque retta r di $\mathcal{Q}$ ed uno, T_3 , degli ∞^1 spazi di Θ che la contengono. Siano T'_3 lo spazio di Θ' che corrisponde a quest'ultimo mediante Ω_3 , ed r' la retta omologa di r nella reciprocità intercedente fra T_3 e T'_3 (n. 3); la relazione fra r ed r' riuscirà scambievole, ed Ω associerà ad ogni punto di r ogni punto di r' . Agli ∞^1 punti P di r corrispondono dunque, in virtù di Ω_0 , ∞^1 spazi S'_3 passanti tutti per la retta r' , la quale risulta così individuata dalla sola r (indipendentemente da T_3) come luogo dei punti comuni a due qualunque di tali S'_3 ⁽³⁾.

Fra la totalità delle rette di $\mathcal{Q}$ e la totalità delle rette di $\mathcal{Q}'$ resta pertanto definito un riferimento birazionale senza eccezioni, che denoteremo con Ω_1 . Quando uno spazio T_3 di Θ varia attorno ad una retta r di $\mathcal{Q}$, lo spazio T'_3 che corrisponde a T_3 in Ω_3 passa sempre per la retta r' omologa di r secondo Ω_1 ; e reciprocamente. Del pari Ω_0 (Ω_0') subordina un riferimento birazionale senza eccezioni fra i punti di r (di r') e gli spazi di Σ' (di Σ) passanti per r' (per r).

(3) Si rammenti che due spazi distinti di Σ' possono avere al più una retta in comune.

Convenendo per comodità di dire che due spazi di sistemi opposti di una V_6^2 non specializzata si appartengono quando hanno un piano in comune, risulta in conclusione che:

Il riferimento Ω — definito dalle formole (2) fra le quadriche $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ — induce fra gli spazi a 0, 1, 3 dimensioni di $\mathcal{Q}$ e gli spazi a 0, 1, 3 dimensioni di $\mathcal{Q}'$ quattro corrispondenze birazionali senza eccezioni

$$\Omega_0(P \rightleftharpoons S_3), \quad \Omega_0'(S_3 \rightleftharpoons P'), \quad \Omega_1(r \rightleftharpoons r'), \quad \Omega_3(T_3 \rightleftharpoons T_3'),$$

conservanti nel loro complesso tutte le relazioni di appartenenza fra detti spazi; ciascuna di queste determina pienamente le altre tre ed Ω .

Si vedrà poi (nn. 13, 15) come le corrispondenze considerate possano venir costruite.

5. Dal n. 4 segue immediatamente che:

Punti di $\mathcal{Q}$ (di $\mathcal{Q}'$) coniugati rispetto a tale quadrica, sono trasformati da Ω_0 (da Ω_0') in spazi di Σ' (di Σ) fra loro incidenti (ossia segantisi lungo una retta); e viceversa.

Dire che un punto P di $\mathcal{Q}$ è coniugato rispetto a (tutti i punti di) una retta r di $\mathcal{Q}$ che non lo contenga, è come asserire che il piano Pr giace su $\mathcal{Q}$; in quest'ipotesi per tale piano, ossia per P ed r , passa uno spazio S_3 di Σ , e viceversa. Dunque:

Ad un punto e ad una retta non appartenentisi di una delle due quadriche $\mathcal{Q}$ o $\mathcal{Q}'$, coniugati rispetto ad essa, corrispondono sull'altra — rispettivamente in virtù di Ω_0 od Ω_0' e di Ω_1 — uno spazio ed una retta fra loro incidenti; e reciprocamente.

Se r, r_1 sono due qualunque rette di $\mathcal{Q}$ coniugate ed incidenti, il loro piano giace su $\mathcal{Q}$, onde per esso — ossia per r ed r_1 — passano un S_3 ed un T_3 ; le rette r', r_1' omologhe di quelle secondo Ω_1 dovranno pertanto appartenere ad un P' e ad un T_3' di $\mathcal{Q}'$, e risulteranno quindi ancora rette coniugate ed incidenti di tale quadrica. Se invece r, r_1 son due rette sghembe e coniugate di $\mathcal{Q}$, lo spazio che le congiunge — necessariamente situato su $\mathcal{Q}$ — non può che essere un T_3 od un S_3 ; nei due casi, rispettivamente, dovranno le rette omologhe r', r_1' risultar sghembe e situate in uno spazio T_3' (eppertanto coniugate rispetto a $\mathcal{Q}'$), oppure fra loro incidenti ma non coniugate rispetto a $\mathcal{Q}'$. Il ragionamento può venir invertito, e si conclude che:

La corrispondenza Ω_1 trasforma rette incidenti e coniugate di una delle quadriche $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ in rette incidenti e coniugate dell'altra; a rette incidenti e non coniugate corrispondono invece rette sghembe e coniugate, congiunte da uno spazio S_3' .

od S_3 , e viceversa; infine rette sghembe e coniugate congiunte da uno spazio T_3 o T_3' , sono mutate da Ω_1 in rette del pari sghembe e coniugate congiunte da uno spazio T_3' o T_3 .

In base a quanto precede, le due schiere rigate complementari appartenenti ad una quadrica ordinaria di $\mathcal{Q}$ ⁽⁴⁾ sono trasformate da Ω_1 in due sistemi ∞^1 di rette di $\mathcal{Q}'$, tali che ogni retta di ciascun sistema è sghemba e non coniugata rispetto ad ogni ulteriore retta del sistema stesso, e sghemba e coniugata rispetto ad ogni retta dell'altro sistema; detti sistemi son di conseguenza due schiere rigate, situate in spazi mutuamente polari rispetto a $\mathcal{Q}'$. Dunque:

Ω_1 muta sempre una schiera rigata di una delle due quadriche $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ (il cui spazio non le appartenga) in una schiera rigata dell'altra, associando a due schiere complementari due schiere fra loro coniugate.

6. Un S_2 ed un S_4 sghembi, mutuamente polari rispetto a $\mathcal{Q}$, incontrano questa quadrica ordinatamente lungo una conica irriducibile e secondo una V_3^2 non specializzata; e ciascuno degli ∞^1 punti della prima risulta coniugato a ciascuna delle ∞^3 rette della seconda. A questi ultimi elementi Ω_0 ed Ω_1 fanno rispettivamente corrispondere ∞^1 spazi S_3' a due a due sghembi, ed ∞^3 rette di $\mathcal{Q}'$ tutte incidenti a ciascuno di quelli (n. 5): gli uni e le altre sono conseguentemente i due sistemi di spazi generatori a 3 e ad 1 dimensione di una V_4^4 di C. SEGRE di indici (1, 3), tracciata su $\mathcal{Q}'$. Pertanto:

Ω_0 associa alle coniche irriducibili di $\mathcal{Q}$ le V_4^4 di C. SEGRE di $\mathcal{Q}'$ aventi gli spazi ordinari generatori appartenenti a Σ' (delle quali ne resta individuata una ed una sola da tre generici spazi di questo sistema); e viceversa. Alle coniche spezzate di $\mathcal{Q}$, corrispondono su $\mathcal{Q}'$ le V_4^4 composte di due V_4^2 doppiamente specializzate con uno spazio S_3' a comune.

Gli ∞^1 spazi generatori di una delle suddette V_4^4 di C. SEGRE ammettono ∞^4 spazi appoggiati a ciascuno di essi lungo rette, ∞^3 dei quali giacciono per intero sulla quadrica $\mathcal{Q}'$ (ricoprendola una volta sola): ad essi, in virtù di Ω_0 , corrispondono su $\mathcal{Q}$ i punti di una V_3^2 non specializzata; e reciprocamente.

È facile vedere, sempre avendo presente il n. 5, che una delle V_4^4 di C. SEGRE dianzi considerate è segata da ogni spazio

(4) Qui ed in seguito, parlando di conica o di quadrica ordinaria di $\mathcal{Q}$ (o di $\mathcal{Q}'$), ammettiamo tacitamente che quest'ultima non contenga il piano o lo spazio di appartenenza della prima.

(non generatore) di Σ' secondo due rette sghembe (distinte od infinitamente vicine), e da ogni 'spazio di Θ' lungo una conica irriducibile; fatta solo eccezione per posizioni particolari di detti spazi, in cui l'intersezione rispettivamente diventa una quadrica ordinaria, oppure si compone di un piano e di una retta.

7. Da quanto è stato detto verso la fine del n. 5 discende subito che:

Due spazi ordinari sghembi, mutuamente coniugati rispetto a $\mathcal{Q}'$, determinano su questa due V_2^2 non specializzate; le ∞^4 rette che si appoggiano ad entrambe le V_2^2 stanno tutte su $\mathcal{Q}'$ e generano una V_5^4 base di un fascio di quadriche, contenente 4 diversi sistemi continui ∞^2 di spazi ordinari, dei quali due appartengono a Σ' e due a Θ' . Orbene, gli S_3' dei primi due sistemi sono mutati da Ω_0 nei punti di due V_2^2 non specializzate e mutuamente coniugate di $\mathcal{Q}$; viceversa, ad una V_2^2 non specializzata di $\mathcal{Q}$ corrispondono su $\mathcal{Q}'$ ∞^2 S_3' generatori di una V_5^4 del tipo suddetto.

Sempre in base al n. 5, le V_5^4 e le V_4^4 considerate in questo n.° e nel n.° precedente possono anche ottenersi come luoghi degli spazi di Σ' che contemporaneamente si appoggiano (lungo rette) rispettivamente a 4 ed a 5 spazi genericamente fissati di Σ' . È poi superfluo aggiungere che, in tutto quanto precede, è lecito scambiare gli uffici di $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$.

§ III. ALCUNE APPLICAZIONI.

8. Premettiamo un'osservazione, di un caso particolare della quale ci varremo poi ripetutamente.

Una corrispondenza birazionale senza eccezioni fra due ipersuperficie algebriche V_{n-1}^m , $V_{n-1}^{m'}$ prive di punti multipli, di ordini m , m' arbitrari e che appartengano a spazi di dimensione $n \geq 4$, risulta necessariamente omografica (onde dev'essere $m = m'$).

In virtù di un noto teorema di SÉVERI ⁽⁵⁾, si ha infatti che le sole V_{n-2} algebriche di V_{n-1}^m , $V_{n-1}^{m'}$ sono le intersezioni complete di queste colle altre forme del loro spazio. Le sezioni iperpiane di V_{n-1}^m , $V_{n-1}^{m'}$ sono perciò caratterizzate dal fatto di costituire sopra queste varietà i sistemi lineari senza punti base aventi i gradi minimi: esse debbon dunque corrispondersi nel

⁽⁵⁾ F. SEVERI, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », serie V, t. 15 (1906)₂, p. 691.

dato riferimento birazionale fra V_{n-1}^m e $V_{n-1}^{m'}$, ciò che dimostra l'asserto ⁽⁶⁾.

9. In virtù dei nn. 2 e 8 si ha senz'altro che:

Una rappresentazione senza eccezioni degli S_8 di un sistema esistenti su di una quadrica non specializzata di S_7 coi punti di un'altra V_6^2 non specializzata, risulta individuata a meno di una trasformazione omografica di V_6^2 in sè.

Un'altra conseguenza notevole, non avente l'analogo negli spazi di dimensione ≤ 5 , è che:

Vi sono due e solo due tipi distinti di trasformazioni birazionali senza eccezioni fra due sistemi ∞^6 , Θ e Θ' , di spazi generatori di due quadriche, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$, non specializzate di S_7 . Le trasformazioni dell'un tipo sono subordinate da un riferimento omografico, da esse univocamente determinato, fra $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$; quelle dell'altro tipo, invece, risultano proiettivamente identiche alla corrispondenza Ω_3 qui definita nel n. 3.

Rappresentando infatti nel modo noto Θ e Θ' coi punti di due V_6^2 non specializzate di S_7 , la trasformazione assegnata fra quei due sistemi si rispecchia in una trasformazione birazionale senza eccezioni, e perciò (n. 8) omografica, fra tali quadriche; si può dunque far sì che queste coincidano in un'unica quadrica $\bar{\mathcal{Q}}$, in modo che uno stesso punto $\bar{P}$ di $\bar{\mathcal{Q}}$ venga sempre a rappresentare due spazi T_3 , T_3' omologhi di Θ , Θ' . Quando $\bar{P}$ descrive un dato spazio di $\bar{\mathcal{Q}}$, tanto T_3 su $\mathcal{Q}$ che T_3' su $\mathcal{Q}'$ possono solo variare passando per un punto fisso, o conservandosi appoggiati secondo piani ad uno spazio fisso; e vi son due alternative da distinguere, secondochè per T_3 e per T_3' si verifica o non si verifica una medesima di tali eventualità.

Nel primo caso, gli spazi di $\bar{\mathcal{Q}}$ di un opportuno sistema risultano riferiti birazionalmente senza eccezioni tanto ai punti di $\mathcal{Q}$ quanto ai punti di $\mathcal{Q}'$; e la corrispondenza puntuale che ne con-

(6) Il risultato stabilito, ove di più si supponga $m > n + 1$ (restrizione che peraltro non sarà verificata nelle applicazioni che di quello faremo), discende anche immediatamente da un teorema dato dal SEVERI [*Math. Ann.*, t. 109 (1934), p. 4] come estensione di una proposizione di B. SEGRE [ibid., p. 1]. Quest'ultima mostra come il suddetto risultato valga anche per $n = 2$, $m > 3$ [su ciò cfr. anche G. MARLETTA, « *Atti Acc. Gioenia in Catania* », s. IV, t. 19 (1905), e « *Rend. del Circ. Mat. di Palermo* », t. 24 (1907), p. 229]; e si può vedere ch'esso sussiste altresì per $n = 3$, sotto l'unica condizione che sia $m \neq 4$ (fanno p. es. effettivamente eccezione le superficie più generali del 4° ordine che contengono una cubica gobba ed una sestica di genere 2).

segue fra $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$, necessariamente omografica (n. 8) perchè birazionale senza eccezioni, muta Θ in Θ' subordinando fra questi sistemi la trasformazione assegnata.

Nel secondo caso, ad ogni spazio di uno dei due sistemi di $\mathcal{Q}$ corrisponde un punto su $\mathcal{Q}$ ed uno spazio su $\mathcal{Q}'$, appartenente al sistema Σ' opposto a Θ' ; la corrispondenza birazionale senza eccezioni che così si ottiene fra i punti di $\mathcal{Q}$ e gli spazi di Σ' , deve — per quanto precede — essere proiettivamente identica alla Ω_0 del n. 2, onde il dato riferimento fra Θ e Θ' risulta proiettivamente identico alla Ω_3 del n. 3.

10. Conservando le notazioni del § I, ci proponiamo di determinare l'ordine della V_6 rappresentante Σ sulla grassmanniana di indici (7, 3), ossia il numero degli S_3 di Σ che contemporaneamente si appoggiano a 6 spazi ordinari generici del suo S_7 . Questi ultimi determinano su $\mathcal{Q}$ altrettante V_2^2 non specializzate, a ciascuna delle quali Ω_0 fa corrispondere su $\mathcal{Q}'$ una V_5^4 intersezione completa di $\mathcal{Q}'$ con un'ulteriore V_6^2 del suo spazio (n. 7). L'ordine richiesto, in virtù della proprietà enunciata alla fine del n. 2, non è altro che il numero dei punti comuni alle 6 V_5^4 che così si hanno su $\mathcal{Q}'$, e quindi vale $2 \cdot 2^6 = 128$. Dunque:

Sopra una quadrica non specializzata di S_7 vi sono 128 S_3 generatori di ciascuno dei due sistemi che si appoggiano a 6 spazi ordinari generici di S_7 .

11. Le corrispondenze considerate nel n. 4 permettono di compiere con grande facilità lo studio dei sistemi continui di spazi, situati su di una V_6^2 non specializzata, aventi dimensione ≤ 5 . Diamo un esempio in proposito.

Un sistema algebrico ∞^5 di S_3 di Σ di cui ne passi uno ed uno solo per ogni retta generica di $\mathcal{Q}$, si trasforma, mediante Ω_0' , in una V_5 algebrica di $\mathcal{Q}'$ incontrante in un sol punto le generatrici di questa quadrica, ossia — in base ad un caso particolare (dovuto al KLEIN) del teorema di SEVERI già citato ⁽⁵⁾ — in una sezione iperpiana di $\mathcal{Q}'$. Si ha pertanto che:

Uno qualunque, Σ , dei due sistemi ∞^6 di S_3 di una V_6^2 non specializzata contiene un insieme lineare ∞^7 di sistemi a 5 dimensioni, ciascuno dei quali ammette uno ed un solo spazio passante per una retta generica di V_6^2 . ∞^6 di questi sistemi (corrispondenti alle sezioni di $\mathcal{Q}'$ coi suoi iperpiani tangenti) sono semplicemente costituiti dagli S_3 di Σ che si appoggiano (lungo rette) ad un S_3 fisso di Σ ; gli altri verranno ritrovati in seguito da un nuovo punto di vista (n. 12), e li denoteremo genericamente colla lettera Ξ .

§ IV. CORRISPONDENZE Ω INVOLUTORIE FRA QUADRICHE $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ SOVRAPPOSTE.

12. Se, conservando le notazioni dei §§ I, II, si ha una corrispondenza Ω fra due quadriche $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ sovrapposte, nella quale due punti omologhi qualsiansi si corrispondano in doppio modo, dovranno del pari risultare involutorie le corrispondenze Ω_1 ed Ω_2 a quella collegate (n. 4), mentre la Ω_0' dovrà coincidere colla Ω_0 ; e reciprocamente. L'essere $\Omega_0' = \Omega_0$ implica intanto che Σ' non differisca da Σ , e quindi pure Θ' coincida con Θ ; rappresentando nel modo solito $\Theta = \Theta'$ coi punti di una V_6^2 non specializzata, Ω_2 si rispecchierà necessariamente (n. 9) in un'omografia involutoria di V_6^2 in sè, scambiante fra loro i due sistemi di spazi di questa quadrica: tale omografia, pertanto, non potrà essere che un'omologia armonica od un'omografia biassiale armonica di indici (2, 4). Ne consegue che:

Su di una quadrica $\mathcal{Q}$ di S_7 , quando si fissi quale dei due sistemi di spazi debba essere il sistema Θ trasformato in sè, vi sono due soli tipi di corrispondenze Ω_2 (e quindi pure Ω , Ω_1) involutorie: le une — che diremo di 1^a specie, in numero di ∞^7 — ammettono come spazi uniti gli ∞^5 spazi di un sistema Ξ contenuto in Θ (n. 11), ed essi soltanto; le altre — che diremo di 2^a specie, in numero di ∞^{15} — ammettono come uniti ∞^1 spazi di Θ costituenti una V_4^1 di C. SEGRE e gli ∞^3 spazi di Θ che si appoggiano lungo rette a ciascuno di quelli (n. 6). Viceversa, assegnato comunque su $\mathcal{Q}$ un sistema Ξ od una V_4^1 di C. SEGRE, esiste una ed una sola corrispondenza Ω_2 involutoria (rispettivamente di 1^a o di 2^a specie) avente come uniti gli spazi di Ξ o gli spazi di V_4^1 e quelli che ad essi si appoggiano lungo rette.

Tutte le corrispondenze involutorie di 1^a specie e tutte le corrispondenze involutorie di 2^a specie risultano fra loro proiettivamente identiche; ogni corrispondenza involutoria di 2^a specie può venir decomposta nel prodotto di 3 corrispondenze involutorie di 1^a specie.

13. Approfondiremo ora lo studio delle corrispondenze Ω_2 involutorie di 1^a specie, e delle corrispondenze Ω , Ω_0 , Ω_1 ad esse collegate (che ancora diremo di 1^a specie), pervenendo fra l'altro ad alcune loro semplicissime costruzioni; e va rilevato che, in base al n. 9, le costruzioni relative al caso generale potranno immediatamente dedursi da quelle, col trasformare $\mathcal{Q}$ o $\mathcal{Q}'$ mediante un'omografia.

È ovvio che due punti distinti di una V_6^2 non specializzata, che si corrispondano in un'omologia armonica trasformante V_6^2

in sè, risultano sempre non coniugati rispetto a V_6^2 ; e che due coppie di punti siffatti stanno su di una conica (eventualmente spezzata) di V_6^2 , ed individuano pienamente l'omologia armonica. In virtù dei nn. 12, 5, 6, da qui si trae che:

Due spazi distinti, omologhi in una corrispondenza Ω_3 involutoria di 1^a specie, sono sempre sghembi fra loro; e due coppie di spazi siffatti appartengono sempre ad una medesima V_4^4 di C. SEGRE (eventualmente spezzata in due V_4^2 con uno spazio a comune). Fissati comunque in Θ due coppie di spazi sghembi, U_3 ed U_3' , V_3 e V_3' , appartenenti ad una V_4^4 di C. SEGRE, le due V_4^4 di C. SEGRE che congiungono un generico spazio T_3 di Θ ad U_3 , U_3' ed a V_3 , V_3' si incontrano ancora secondo un ulteriore spazio T_3' di Θ ; la corrispondenza involutoria che così nasce in Θ associando T_3 e T_3' è del tipo Ω_3 in esame, ed è l'unica di queste in cui corrispondano U_3 ed U_3' , V_3 e V_3' .

14. In base a quanto è stato detto nel n. 3, si ha che le corrispondenze di 1^a specie possono venir rappresentate analiticamente cogli sviluppi del § I, nei quali semplicemente le (x, y) , (x', y') siano interpretate come coordinate proiettive omogenee di punto in S_7 rispetto ad un medesimo sistema di riferimento. Poichè tutte le (2) sono manifestamente verificate, in forza dell'equazione di Ω , se vi si pone $x_i' = x_i$, $y_i' = y_i$ (per $i=0, 1, 2, 3$), così:

Una corrispondenza Ω involutoria di 1^a specie ammette tutti i punti della quadrica $\mathcal{Q}$ su cui agisce come uniti (7). Un punto P di $\mathcal{Q}$ ed uno spazio S_3 di Σ , fra loro associati rispetto ad una corrispondenza Ω_0 di 1^a specie, sempre si appartengono; diremo che P è il centro di S_3 , e che S_3 è lo spazio centrale di P (rispetto ad Ω_0).

Da qui, avendo anche riguardo ai nn. 3, 4 e 13, è facile dedurre che:

Una corrispondenza Ω_1 involutoria di 1^a specie su di una quadrica $\mathcal{Q}$ ammette ∞^7 rette unite. Per ogni punto P di $\mathcal{Q}$ passano ∞^3 rette unite, costituenti la stella di centro P del relativo spazio centrale; ed in ogni S_3 di Σ vi sono ∞^2 rette unite, tutte uscenti dal relativo centro. Ciascuno degli ∞^1 spazi di Θ che contengono una retta unita di Ω_1 risulta unito secondo Ω_3 ; ed in ognuno degli ∞^5 spazi di Θ uniti secondo Ω_3 esistono ∞^3 rette unite di Ω_1 , costituenti un complesso lineare generale.

15. Se T_3 , T_3' sono due qualunque spazi distinti di Θ omologhi in una corrispondenza Ω_3 involutoria di 1^a specie, e perciò (n. 13)

(7) Questa proprietà verrà invertita nel n. 16.

sghebbi fra loro, e P è un qualsiasi punto di uno di essi, p. es. di T_3 , lo spazio S_2 omologo di P secondo Ω_0 deve contenere questo punto (n. 14) ed appoggiarsi a T_3' secondo un piano (n. 3). Su $\mathcal{Q}$ esiste un solo spazio S_2 soddisfacente a queste condizioni, luogo delle rette di $\mathcal{Q}$ uscenti da P ed incidenti a T_3' ; onde, tenendo anche presente l'ultimo enunciato del n. 14, si ha che:

Tutte le ∞^5 rette di $\mathcal{Q}$ che si appoggiano a due spazi distinti di Θ omologhi secondo Ω_3 , risultano unite rispetto ad Ω_1 . Viceversa, due spazi distinti di Θ si corrispondono in Ω_3 , se ogni retta di $\mathcal{Q}$ che ad essi contemporaneamente si appoggi è unita in Ω_1 .

Fissati nel sistema Θ due spazi T_3, T_3' distinti, omologhi secondo Ω_3 , ogni spazio S_2 dell'altro sistema che seghi uno di quelli secondo un piano ammette come centro il suo punto d'incontro coll'altro spazio. Se invece S_2 si appoggia a ciascuno di quei due spazi solo in un punto, il suo centro è un punto distinto dai due punti d'appoggio ed allineato con essi (in quanto la retta congiungente questi due punti deve essere unita per Ω_1 , in conformità a ciò che precede, e passare per il centro di S_3 , in virtù del n. 14). Ne risulta che:

Individuata (come alla fine del n. 13) una corrispondenza Ω_3 involutoria di 1^a specie, mediante due coppie di spazi coniugati U_3 ed U_3' , V_3 e V_3' di Θ appartenenti ad una V_4 di C. SEGRE, la corrispondenza Ω_0 a quella collegata può venir costruita semplicemente così. Un S_2 di Σ appoggiato lungo un piano ad uno di quegli spazi, ammette come centro il punto d'appoggio collo spazio a questo coniugato [onde per tale punto passa la retta congiungente i punti d'appoggio di S_2 cogli altri due spazi ⁽⁸⁾]; ogni altro S_2 di Σ si appoggia alle due date coppie di spazi secondo due coppie di punti, congiunti da rette fra loro incidenti ⁽⁸⁾: ed il punto d'incidenza di queste è precisamente il centro dell' S_2 . Viceversa, un punto P di uno di quei 4 spazi ammette come spazio centrale l' S_2 di Σ uscente da P ed appoggiato lungo un piano allo spazio coniugato del primo; per ogni altro punto P di $\mathcal{Q}$ passa una retta appoggiata ad U_3 e U_3' , ed una retta appoggiata a V_3 e V_3' : queste due rette stanno su $\mathcal{Q}$, ed anzi su un piano di $\mathcal{Q}$, onde per esse passa uno spazio di Σ , il quale è precisamente lo spazio centrale di P .

16. Sia da ultimo Ω_0^* una qualunque rappresentazione senza eccezioni degli spazi S_2 di Σ coi punti di $\mathcal{Q}$, tale che un S_2 di Σ passi sempre per il punto omologo. Consideriamo, accanto a quella,

⁽⁸⁾ Questa proprietà può venir connessa ad altra segnalata verso la fine del n. 6.

una qualunque ulteriore corrispondenza Ω_0 di 1^a specie, la quale pure — come sappiamo (n. 14) — assocerà ad ogni S_2 di Σ un punto situato su esso. Resta conseguentemente definita (n. 9) una trasformazione omografica di $\mathcal{Q}$ in sè, nella quale si corrispondono un punto P ed un punto P^* di $\mathcal{Q}$ che siano associati ad un medesimo S_2 di Σ ; due siffatti punti P, P^* distinti sono sempre congiunti da una retta giacente su $\mathcal{Q}$ (perchè situata nel relativo S_2), onde la suddetta omografia risulta inerente alla quadrica $\mathcal{Q}$ ⁽⁹⁾ e — come tale — non può essere che un'omografia biassiale, generale o speciale. Esaminiamo separatamente le due alternative.

Nel primo caso gli assi dell'omografia sono necessariamente due spazi ordinari sghembi fra loro ⁽⁹⁾, e l'omografia ammette come unite tutte le rette che si appoggiano ad entrambi; ne consegue, avendo anche riguardo al n. 15, che detti assi sono due spazi di Θ fra loro coniugati nella corrispondenza Ω_3 , involutoria di 1^a specie, collegata alla Ω_0 . Viceversa è facile vedere che, componendo Ω_0 con una qualsiasi delle ∞^7 omografie biassiali generali (trasformanti $\mathcal{Q}$ in sè) aventi come assi due spazi T_3, T_3' distinti (e perciò sghembi) omologhi secondo Ω_3 , si ottiene una trasformazione Ω_0^* del tipo voluto, la quale — anzi — risulta di 1^a specie.

Nel secondo caso valgono conclusioni perfettamente analoghe; e si ottengono le ∞^6 omografie biassiali speciali di indici (3, 3) (limiti delle precedenti) aventi come spazio fondamentale uno degli ∞^5 spazi T_3 uniti secondo Ω_3 e tali che, fra tale spazio T_3 e la stella di cui esso è centro, subordinano la proiettività prodotto della polarità nulla determinata su T_3 da Ω_0 per la proiettività individuata da $\mathcal{Q}$ fra dette forme.

In definitiva si ha che:

Le corrispondenze Ω involutorie di 1^a specie di una quadrica $\mathcal{Q}$ in sè, sono le sole corrispondenze Ω che ammettono tutti i punti di $\mathcal{Q}$ come uniti, e si distribuiscono — come già sappiamo — in due diversi sistemi continui ∞^7 . Da una qualunque, Ω , di esse si deducono tutte le altre del medesimo sistema, e ciascuna una volta sola, componendo Ω con una arbitraria delle ∞^7 omografie biassiali (generalì o speciali) individuali — nel modo suddetto — dalle varie coppie di spazi (distinti o coincidenti) omologhi nella corrispondenza Ω_3 collegata ad Ω .

⁽⁹⁾ Cfr. B. SEGRE, *Gli scorrimenti nella Geometria non euclidea degli iperspazi ed alcune notevoli corrispondenze proiettive*, « Annali di Mat. », serie IV, t. 12 (1933-34), p. 327, § II.