
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE PALAMA

Sui polinomi di Laguerre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.1, p. 19–26.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_19_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

Sui polinomi di Laguerre.

Nota di GIUSEPPE PALAMA (a Lecce).

Sunto. - Sfruttando dei risultati relativi alla trasformazione di LAPLACE e delle identità relative all'operatore Δ , si danno delle formule per i polinomi di LAGUERRE.

I polinomi di LAGUERRE, a differenza di altri polinomi, come ad es. quelli di HERMITE, di LEGENDRE e forse degli stessi poli-

nomi sferici generalizzati, non sono stati finora troppo studiati ⁽¹⁾ e quindi non credo privo d'interesse un lavoro, come questo, che valga ad accrescere, anche se non notevolmente, il numero delle formule conosciute che si riferiscono a quei polinomi.

1. È nota l'elegante formula stabilita da F. TRICOMI ⁽²⁾

$$(1) \quad \mathfrak{L} \left[x^z L_n^{(z)}(x) \right] = \frac{\Gamma(z+n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{s^{z+1}} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n, \quad z > -1.$$

Sorge spontaneo il pensiero di trovare la trasformata di LAPLACE di una funzione, analoga alla precedente, $x^z L_n^{(z)}(x)$, ma con l'esponente di x non uguale ad z .

Applicando la

$$\mathfrak{L}[D_x F(x)] = s \mathfrak{L}[F(x)] - F(0),$$

ove D_x sta per $\frac{d}{dx}$, per $F(x) = x^{z+m} L_n^{(z)}(x)$, supponendo $z + m > 0$, si ha

$$(2) \quad \mathfrak{L} \left[(z+m) x^{z+m-1} L_n^{(z)}(x) \right] - \mathfrak{L} \left[x^{z+m} L_{n-1}^{(z+1)}(x) \right] = s \mathfrak{L} \left[x^{z+m} L_n^{(z)}(x) \right]$$

che è una relazione ricorrente che permette di ricavare successivamente, ponendovi $m = 1, 2, \dots$, le trasformate di LAPLACE delle funzioni

$$x^{z+1} L_n^{(z)}(x), \quad x^{z+2} L_n^{(z)}(x), \dots$$

Nel caso particolare di $m = 1$, tenendo presente la (1), si trova

$$(3) \quad \mathfrak{L} \left[x^{z+1} L_n^{(z)}(x) \right] = \frac{\Gamma(z+n+1)}{n! s^{z+3}} \left(\frac{s-1}{s} \right)^{n-1} \cdot [(z+1)(s-1) - n].$$

La (18) del n.º 7, dà la trasformata di LAPLACE di $x^{z+m} L_n^{(z)}(x)$.

2. Applichiamo la (3) per determinare una formula per i polinomi di LAGUERRE, credo, elegante.

⁽¹⁾ Cfr. G. PALAMÀ, *Sui polinomi di Legendre, di Laguerre e di Legendre*, « R. Ist. Lombardo di Sc. e l. », vol. LXX, 2, 1937, in cui vi sono cenni bibliografici; *La trasformazione di Laplace e i polinomi di Laguerre e di Hermite*, « R. Ist. Lombardo di Sc. e l. », vol. LXX, 3, 1937.

⁽²⁾ F. TRICOMI, *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre: 1. Inversione della trasformazione*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », seduta 17 febbraio 1935.

La (3) a mezzo della (1), può scriversi

$$\Delta \left[x^{x+1} L_n^{(x)}(x) \right] = \frac{x+1}{x+n+1} \Delta \left[x^{x+1} L_n^{(x+1)}(x) \right] - \frac{1}{x+n+1} \Delta \left[x^{x+2} L_{n-1}^{(x+2)}(x) \right]$$

che dà

$$(4) \quad (x+n+1) L_n^{(x)}(x) - (x+1) L_n^{(x+1)}(x) + x L_{n-1}^{(x+2)}(x) = 0;$$

eliminando $L_{n-1}^{(x+2)}(x)$ fra questa e la relazione nota

$$L_{n-1}^{(x+2)}(x) = L_n^{(x+2)}(x) - L_n^{(x+1)}(x),$$

si ha infine la formula cercata

$$(5) \quad x L_n^{(x+2)}(x) - (x+1+x) L_n^{(x+1)}(x) + (x+n+1) L_n^{(x)}(x) = 0,$$

che è una relazione ricorrente rispetto al parametro x , la quale forse vien data qui per la prima volta.

3. Tanto la (4) che la (5) si prestano per determinare un gran numero di formule relative ai polinomi di LAGUERRE.

La (4) difatti può scriversi

$$(x+1) L_n^{(x+1)}(x) - x L_n^{(x)}(x) = (n+1) L_n^{(x)}(x) + x L_{n-1}^{(x+2)}(x),$$

cioè

$$(6) \quad \Delta \left[x L_n^{(x)}(x) \right] = (n+1) L_n^{(x)}(x) + x L_{n-1}^{(x+2)}(x),$$

in cui Δ , differenza finita del primo ordine, s'intende riferito alla variabile x . E uguale significato avrà sempre in seguito l'operatore Δ .

E quindi

$$(7) \quad (1+\Delta) \left[x L_n^{(x)}(x) \right] = (x+1) L_n^{(x+1)}(x).$$

Analogamente se mettiamo la (5) sotto la forma

$$\left[(x+1) L_n^{(x+1)}(x) - x L_n^{(x+2)}(x) \right] - \left[x L_n^{(x)}(x) - x L_n^{(x+1)}(x) \right] = (n+1) L_n^{(x)}(x),$$

si deduce

$$(8) \quad \Delta \left[x L_n^{(x)}(x) - x L_n^{(x+1)}(x) \right] = (n+1) L_n^{(x)}(x).$$

La (6) e la (8), utilizzando delle identità relative all'operatore Δ , danno delle relazioni fra i polinomi di LAQUERRE. A titolo d'esempio noi stabiliremo alcune di queste relazioni nei numeri successivi.

4. Dalla (6) si trae subito

$$\Delta^p \left[\alpha L_n^{(z)}(x) \right] = (n+1) L_{n-p+1}^{(z+p-1)}(x) + \alpha L_{n-p}^{(z+p+1)}(x),$$

tenuto presente che la nota relazione

$$(9) \quad L_n^{(z+1)}(x) - L_n^{(z)}(x) = L_{n-1}^{(z+1)}(x),$$

dà

$$(9') \quad \Delta L_n^{(z)}(x) = L_{n-1}^{(z+1)}(x).$$

L'identità

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} f(x+m-j) = \Delta^m [f(x)].$$

se $f(x) = \alpha L_n^{(z)}(x)$, dà

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (x+m-j) L_n^{(z+m-j)}(x) = (n+1) L_{n-m+1}^{(x+m-1)}(x) + \alpha L_{n-m}^{(x+m+1)}(x),$$

cioè, ponendo $\alpha + m = \beta$,

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (\beta-j) L_n^{(\beta-j)}(x) = (n+1) L_{n-m+1}^{(\beta-1)}(x) + \alpha L_{n-m}^{(\beta+1)}(x)$$

e da questa

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (\beta-j) L_n^{(\beta-j)}(x) = \begin{cases} \beta(m+1) - mx & \text{per } n = m \\ m & \text{per } n = m-1 \\ 0 & \text{per } n \leq m-2. \end{cases}$$

L'ultima relazione, se $\beta = 0$, può anche scriversi

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m-1}{j-1} L_n^{-j}(x) = 0, \quad \text{per } n \leq m-2.$$

5. Applicando ad ambo i membri della (6) l'operatore Δ^{-1} , osservato che la (9) dà subito

$$(10) \quad \Delta^{-1} \left[L_n^{(z)}(x) \right] = L_{n+1}^{(z-1)}(x)$$

e in generale

$$\Delta^{-p} L_n^{(z)}(x) = L_{n+p}^{(z-p)}(x),$$

si ricava

$$(11) \quad \Delta^{-1} \left[x L_n^{(z)}(x) \right] = (n+1) L_{n+2}^{(z-2)}(x) + x L_{n+1}^{(z)}(x).$$

Da (7) si ottiene invece

$$(12) \quad (1 + \Delta)^p \left[x L_n^{(z)}(x) \right] = (x+p) L_n^{(z+p)}(x).$$

Ciò premesso a mezzo della seguente identità

$$\sum_{j=0}^{m-1} (1 + \Delta)^j \left[x L_n^{(z)}(x) \right] = [(1 + \Delta)^m \Delta^{-1} - \Delta^{-1}] \cdot \left[x L_n^{(z)}(x) \right],$$

tenute presenti la (12) e la (11) abbiamo

$$\sum_{j=0}^{m-1} (x+j) L_n^{(z+j)}(x) = (n+1) L_{n+2}^{(x+m-2)}(x) + x L_{n+1}^{(x+m)}(x) - (n+1) L_{n+2}^{(x-2)}(x) - x L_{n+1}^{(z)}(x).$$

Ponendo

$$\Delta \left[L_{n+1}^{(z)}(x) \right] = L_{n+1}^{(x+m)}(x) - L_{n+1}^{(z)}(x),$$

questa relazione può anche scriversi

$$\sum_{j=0}^{m-1} (x+j) L_n^{(z+j)}(x) = \Delta \left[(n+1) L_{n+2}^{(x-2)}(x) + x L_{n+1}^{(z)}(x) \right].$$

6. Come i risultati ottenuti nei numeri 4 e 5, molti altri ancora possono stabilirsi, oltre che servendosi della (6), anche a mezzo della (8), oppure, meglio, mediante la più semplice (9').

In questo numero preferiamo utilizzare la (9') per ricavare altre formule per i polinomi di LAGUERRE, che suppongo eleganti e in buona parte forse anche nuove.

La (10) a mezzo della (9) dà

$$(13) \quad (1 + \Delta^{-1}) L_n^{(z)}(x) = L_{n+1}^{(z)}(x)$$

e quindi

$$(14) \quad (1 + \Delta^{-1})^p L_n^{(z)}(x) = L_{n+p}^{(z)}(x).$$

Ora dall'identità

$$\sum_{j=0}^m (1 + \Delta^{-1})^j \left[L_n^{(z)}(x) \right] = \frac{(1 + \Delta^{-1})^{m+1} - 1}{\Delta^{-1}} \left[L_n^{(z)}(x) \right] = [\Delta(1 + \Delta^{-1})^{m+1} - \Delta] L_n^{(z)}(x)$$

tenute presenti le (14), (9'), si ricava

$$\sum_{j=0}^m L_{n+j}^{(x)} = L_{n+m}^{(x+1)} - L_{n-1}^{(x+1)},$$

da cui per $n=0$ ⁽¹⁾

$$(15) \quad \sum_{j=0}^m L_j^{(x)} = L_m^{(x+1)}.$$

Analogamente dalla

$$(1 + \Delta^{-1}) \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \Delta^{-j} L_n^{(x)} = [1 - (-1)^m \Delta^{-m}] L_n^{(x)},$$

si ha

$$\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j L_{n+j+1}^{(x-j)} = L_n^{(x)} - (-1)^m L_{n+m}^{(x-m)}$$

che cambiando $n+1$ in n ed $m-1$ in m , diventa

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j L_{n+j}^{(x-j)} = L_{n-1}^{(x)} + (-1)^m L_{n+m}^{(x-m-1)}.$$

Questa per $n=0$, dà

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j L_j^{(x-j)} = (-1)^m L_m^{(x-m-1)}.$$

Utilizzando infine le identità

$$(16) \quad \Delta \sum_{j=0}^{m-1} (1 + \Delta)^{-j} = (1 + \Delta) - (1 + \Delta)^{-m+1},$$

$$(1 + \Delta^{-1})^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \Delta^{-j},$$

$$(1 + \Delta)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \Delta^j,$$

si ricava rispettivamente, intendendo sempre i due membri di

(1) La (15) coincide con la formula (32) di p. 20 del 1° dei miei lavori citati e così pure, con la formula successiva alla (32) di quel lavoro, coincide la seguente formula (16').

ciascuna di esse applicati a $L_n^{(x)}$,

$$(16') \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} L_{n-1}^{(x-j+1)} &= L_n^{(x+1)} - L_n^{(x-m+1)}, \\ \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} L_{n+j}^{(x-j)} &= L_{n+m}^{(x)}, \\ \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{m+j-1}{j} L_{n-j}^{(x+j)} &= L_n^{(x-m)}. \end{aligned}$$

Per la (16) si tenga presente che

$$(1 + \Delta)^{-p} L_n^{(x)} = L_n^{(x-p)},$$

come si ricava facilmente dalla (9).

7. Stabiliamo in questo numero un'altra relazione fra i polinomi di LAGUERRE, utilizzando la (1) e la

$$(17) \quad \mathcal{L}[D_x^m f(x)] = s^m \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{j=0}^{m-1} D_x^j f(0) \cdot s^{m-1-j},$$

(ove $D_x^p = \frac{d^p}{dx^p}$) per $f(x) = x^{\alpha+m} L_n^{(x)}$.

Perciò ricordando che $D_x^s L_n^{(x)} = (-1)^s L_{n-s}^{(x+s)}$, si ha subito

$$D_x^m \left[x^{\alpha+m} L_n^{(x)} \right] = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m-j} \binom{m}{j} \Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(\alpha+m-j+1)} x^{\alpha+m-j} L_{n-m+j}^{(x+m-j)}$$

e quindi, per la (17), se $\alpha > -1$,

$$(-1)^m \Gamma(\alpha+m+1) \mathcal{L} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j \binom{m}{j} x^{\alpha+m-j} L_{n-m+j}^{(x+m-j)}}{\Gamma(\alpha+m-j+1)} = s^m \mathcal{L} \left[x^{\alpha+m} L_n^{(x)} \right],$$

ossia, a mezzo della (1) e dividendo tutto per s^m ,

$$(18) \quad \begin{aligned} (-1)^m \Gamma(\alpha+m+1) \Gamma(\alpha+n+1) \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j \binom{m}{j} \left(\frac{s-1}{s} \right)^{n-m+j}}{\Gamma(\alpha+m-j+1) (n-m+j)! s^{\alpha-j+2m+1}} &= \\ &= \mathcal{L} \left[x^{\alpha+m} L_n^{(x)} \right], \end{aligned}$$

che dà la trasformata di LAPLACE della funzione $x^{\alpha+m} L_n^{(x)}$.

Questa (18), per la stessa (1), si può scrivere

$$\frac{(-1)^m \Gamma(x+m+1) \Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x+n+m+1)} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j \binom{m}{j}}{\Gamma(a+m-j+1)} \mathcal{L} \left[x^{x+2m-j} L_{n-m+j}^{(x+2m-j)}(x) \right] = \\ = \mathcal{L} \left[x^{x+m} L_n^{(x)}(x) \right]$$

e quindi infine

$$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j \binom{m}{j} L_{n-m+j}^{(x+2m-j)}(x)}{x^j \Gamma(x+m-j+1)} = \frac{(-1)^m \Gamma(x+n+m+1) L_n^{(x)}(x)}{x^m \Gamma(x+m+1) \Gamma(x+n+1)},$$

che, per $x=0$, diventa

$$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j \binom{m}{j} L_{n-m+j}^{(2m-j)}(x)}{x^j (m-j)!} = (-x)^{-m} \binom{n+m}{m} L_n(x).$$

Se è inoltre $n=m$, diviene

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j \binom{n}{j} L_j^{(2n-j)}(x)}{x^j (n-j)!} = (-x)^{-n} \binom{2n}{n} L_n(x).$$

Un altro contributo, alla ricerca di formule relative ai polinomi di LAGUERRE, può essere dato sfruttando la relazione

$$e^D = 1 + \Delta,$$

in cui D è il solito simbolo di derivazione; e ciò faremo in un'altra piccola Nota che sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.