
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DARIO GRAFFI

Un limite superiore per la frequenza e lo smorzamento dei sistemi oscillanti dissipativi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **17** (1938), n.1, p. 15–19.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_15_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1938_1_17_1_15_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1938.

Un limite superiore per la frequenza e lo smorzamento dei sistemi oscillanti dissipativi.

Nota di DARIO GRAFFI (a Torino).

Sunto. - Si considera un sistema meccanico dissipativo che compie piccole escursioni libere intorno ad una posizione di equilibrio stabile e si prova che, se nell'integrale generale delle equazioni del sistema vi sono termini oscillatori, la frequenza e lo smorzamento di questi non superano un certo valore indipendente dall'energia cinetica. Il risultato si estende ai circuiti elettrici e si dimostra una ipotesi del FUBINI-GHIRON.

1. Ricercando la dimostrazione (che riporterò più innanzi) di un'ipotesi contenuta nella recente interessante Memoria del FUBINI-GHIRON sui circuiti elettrici ⁽¹⁾, sono stato condotto a stabilire il seguente teorema di meccanica. Se un sistema meccanico compie, in presenza di forze dissipative, piccole oscillazioni libere intorno ad una posizione di equilibrio stabile, esiste un limite superiore finito, indipendente dall'espressione dell'energia cinetica, per la frequenza e lo smorzamento delle oscillazioni.

Non ho trovato questo teorema in lavori precedenti, per quanto abbia fatto accurate ricerche bibliografiche ⁽²⁾. Però è difficile, per non dire impossibile, affermare con tutta certezza la novità del mio risultato che, come è noto, moltissimi sono i lavori dedicati alla teoria delle piccole oscillazioni.

2. Si abbia un sistema meccanico, a n gradi di libertà, determinato quindi dai parametri $q_1, q_2, \dots, q_n$, olonomo, a vincoli indipendenti dal tempo. Supponiamo che esso compia, in presenza di forze dissipative, piccole escursioni libere intorno ad una posizione di equilibrio stabile.

Precisando le cose, ammetteremo che il moto del sistema sia retto dalle equazioni:

$$(1) \quad \sum_1^n T_{ik} q_k'' + \sum_1^n F_{ik} q_k' + \sum_1^n V_{ik} q_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove T_{ik}, F_{ik}, V_{ik} sono costanti reali e tali che $T_{ik} = T_{ki}, F_{ik} = F_{ki}, V_{ik} = V_{ki}$ per ogni i e k .

(1) E. FUBINI-GHIRON, *Sopra alcuni procedimenti di calcolo operativo*. In corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

(2) Il libro che contiene il maggior numero di risultati sull'argomento in discorso è ancora: ROUTH, *Advanced rigid dynamics*, cap. 7.

Ammetteremo inoltre che le tre forme quadratiche

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_1^n T_{ik} q_i q_k', \quad (3) \quad F = \sum_1^n F_{ik} q_i q_k', \quad (4) \quad V = \frac{1}{2} \sum_1^n V_{ik} q_i q_k$$

rappresentanti, rispettivamente, l'energia cinetica, la funzione di dissipazione, l'energia potenziale, siano definite positive, all'eccezione di V , che potremo supporre anche semidefinita positiva.

L'integrale generale di (1), come è noto, vale una combinazione lineare di $2n$ funzioni della forma $e^{\alpha t}$ dove α è la radice dell'equazione di grado $2n$ ⁽¹⁾:

$$(5) \quad \|\alpha^2 T_{ik} + \alpha F_{ik} + V_{ik}\| = 0.$$

Ora è noto che α può risultare reale o complessa con parte reale negativa. Nel caso in cui α sia complessa si sa che pure $\bar{\alpha}$ (dove $\bar{\alpha}$ è il complesso coniugato di α) è soluzione di (5) e che nell'integrale generale a $e^{\alpha t}$, $e^{\bar{\alpha} t}$ è lecito sostituire $e^{-\mu t} \cos \omega t$, $e^{-\mu t} \sin \omega t$, essendo $-\mu$ la parte reale, ω la parte immaginaria di α o $\bar{\alpha}$ ⁽²⁾.

Ora, se le condizioni iniziali sono tali che la soluzione di (1) si riduca ad una combinazione lineare delle due funzioni sopra scritte si dirà che il sistema compie oscillazioni smorzate con pulsazione ω e con μ per coefficiente di smorzamento. Se invece la soluzione si riduce al tipo $Me^{\alpha t}$ con α reale e M costante reale, si dirà che il sistema compie un moto smorzato ⁽³⁾. In generale si avrà sovrapposizione di moti smorzati e di moti oscillatori smorzati con diversa pulsazione e diverso coefficiente di smorzamento.

Prendiamo in considerazione uno di questi moti oscillatori.

Indichiamo, come già si è fatto, con ω la sua pulsazione e con μ il suo coefficiente di smorzamento. Se $\alpha = -\mu + i\omega$, α è radice di (5), per cui il sistema omogeneo

$$(6) \quad \alpha^2 \sum_1^n T_{ik} A_k + \alpha \sum_1^n F_{ik} A_k + \sum_1^n V_{ik} A_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ammette soluzioni non tutte nulle. Moltiplicando l' i -esima equazione di (6) per $\bar{A}_i$, essendo $\bar{A}_i$ il complesso coniugato di A_i , e sommando rispetto ad i , si trova, dopo aver diviso per α (si ricordi α diverso da zero):

$$(7) \quad \alpha \bar{T} + \bar{F} + \frac{\bar{V}}{\alpha} = 0,$$

⁽¹⁾ Escludiamo, per comodità di esposizione, il caso di radici coincidenti, ma il nostro risultato è generale.

Col simbolo $\|\alpha^2 T_{ik} + \alpha F_{ik} + V_{ik}\|$ indichiamo il determinante, il cui termine generale è $\alpha^2 T_{ik} + \alpha F_{ik} + V_{ik}$.

⁽²⁾ È ovvio che ω si può sempre supporre, come μ , positiva.

⁽³⁾ α , se reale, non può essere positiva.

dove:

$$(8) \quad \bar{T} = \sum_{i,k}^n T_{ik} A_k A_i, \quad (9) \quad \bar{F} = \sum_{i,k}^n F_{ik} A_k \bar{A}_i, \quad (10) \quad \bar{V} = \sum_{i,k}^n V_{ik} A_k \bar{A}_i.$$

Per le nostre ipotesi su T , F , V , le $\bar{T}$, $\bar{F}$, $\bar{V}$, sono forme reali positive, esclusa al più $\bar{V}$ che può essere anche nulla.

Allora separando in (7) la parte reale dall'immaginaria, si ha:

$$(11) \quad -\mu \bar{T} + \bar{F} - \frac{\mu}{\mu^2 + \omega^2} \bar{V} = 0$$

$$(12) \quad \omega \bar{T} - \frac{\omega}{\mu^2 + \omega^2} \bar{V} = 0.$$

Poichè $\omega \neq 0$, si può nella (12) sopprimere ω e ricavare $\bar{T}$, che sostituita nella (11) dà:

$$2\bar{V} = \frac{\mu^2 + \omega^2}{\mu} \bar{F}$$

da cui, essendo $\sqrt{\mu^2 + \omega^2} > \mu$

$$\sqrt{\mu^2 + \omega^2} < \frac{2\bar{V}}{\bar{F}}.$$

Allora riducendo V a forma canonica si ha, indicando $V_1, V_2, \dots, V_n$ i coefficienti principali ⁽¹⁾ della V e con $A_1', A_2', \dots, A_n'$ le variabili che rendono V canonica:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V_1 |A_1'|^2 + V_2 |A_2'|^2 + \dots + V_n |A_n'|^2 \leq v (|A_1'|^2 + |A_2'|^2 + \dots + |A_n'|^2) \\ &= v (|A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2) \end{aligned}$$

essendo v la più grande delle $V_1, V_2, \dots, V_n$.

In modo analogo, indicando con φ il più piccolo dei coefficienti principali di F , si trova:

$$\bar{F} \geq \varphi (|A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2)$$

da cui ricordando che φ deve essere maggiore di zero, si ha:

$$(13) \quad \sqrt{\mu^2 + \omega^2} < \frac{2v}{\varphi}.$$

Da questa ineguazione si traggono subito le limitazioni cercate, ossia:

$$(14) \quad \mu < \frac{2v}{\varphi} \quad \omega < \frac{2v}{\varphi}.$$

(1) Data una forma quadratica M , ridotta a forma canonica, cioè:

$$M = m_1 X_1^2 + m_2 X_2^2 + \dots + m_n X_n^2$$

le $m_1, m_2, \dots, m_n$ si chiameranno coefficienti principali della forma stessa.

I limiti superiori di (13) si possono calcolare riducendo a forma canonica la F e la V , il che implica, come è noto, la risoluzione di due equazioni di grado n , con radici reali, mentre per trovare le z occorre risolvere un'equazione di grado $2n$ e con radici anche complesse. Ma è interessante notare che in molti problemi F e V sono già date in forma canonica, come accade nella questione elettrica che fra poco andremo ad esaminare.

Sarà opportuno osservare, sebbene la cosa sia ovvia, che i limiti superiori di (14) non dipendono da T , come si era annunciato in principio.

3. I risultati ora ottenuti si applicano al caso di un sistema di circuiti elettrici, semplici o a rete senza forze elettromotrici inserite, purchè si sostituisca all'energia cinetica T l'energia magnetica $\mathcal{E}$, all'energia potenziale V l'energia elettrica U , alla funzione di dissipazione F il calore di JOULE Q sviluppato nell'unità di tempo. Se ordiniamo i rami dei vari circuiti in modo opportuno, abbiamo per $\mathcal{E}$, U , Q le espressioni:

$$(15) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{p,s}^n M_{p,s} q_p q_s, \quad (16) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{q_p^2}{C_p}, \quad (17) \quad Q = \sum_{p=1}^n R_p q_p'^2$$

dove q_p è la carica su un'armatura del condensatore inserito nel ramo p -esimo, C_p la sua capacità, R_p la resistenza del ramo in discorso, $M_{p,s}$ la mutua induzione fra il ramo p -esimo e il ramo s -esimo. Se nel ramo p -esimo manca il condensatore, q_p sarà la carica che ha attraversato quel ramo nell'intervallo di tempo $(0, t)$. Ovviamente n sarà il numero totale dei rami dei vari circuiti.

Noi supporremo $\mathcal{E}$ e Q definite positive, U — analogamente al caso meccanico — semidefinita: così alcune o tutte le $\frac{1}{C_p}$ potranno soprirsi nulle.

Ciò posto osserviamo che i risultati raggiunti nel paragrafo precedente si trasportano facilmente nella questione elettrica in discorso.

Si sa infatti che in assenza di forze elettromotrici le q_p si esprimono come combinazioni lineari di funzioni del tipo e^{xt} con gli esponenti x , calcolabili, come nel problema meccanico, col risolvere un'equazione algebrica che qui non è il caso di scrivere.

A seconda che x è reale o complessa, appaiono nell'espressione di q_p termini smorzati o termini oscillatori smorzati ⁽¹⁾. In questo

(1) Cioè termini rispettivamente del tipo e^{-kt} , $e^{-\mu t} \cos \omega t$, $e^{-\mu t} \sin \omega t$ con k, ω, μ reali.

ultimo caso, come abbiamo dimostrato in altro lavoro ancora in corso di stampa sussiste la relazione:

$$(18) \quad \alpha \sum_1^n M_{p,s} A_p \bar{A}_p + \sum_1^n R_p |A_p|^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_1^n \frac{|A_p|^2}{C_p} = 0$$

dove α vale naturalmente $-\mu + i\omega$ (essendo al solito ω la pulsazione, μ lo smorzamento delle oscillazioni), A_p , A , sono numeri non tutti nulli, $\bar{A}_p$ è il complesso coniugato di A_p .

La (18) è identica alla (7), perciò ragionando come nel paragrafo precedente, si trova, tenendo presente che R_p e $\frac{1}{C_p}$ sono i coefficienti principali di Q e U :

$$(19) \quad \sqrt{\mu^2 + \omega^2} \leq \frac{1}{R_m C_m}, \quad (20) \quad \mu < \frac{1}{R_m C_m}, \quad (21) \quad \omega \leq \frac{1}{R_m C_m},$$

dove R_m è la minima resistenza, C_m la minima capacità dei vari rami dei circuiti.

Vediamo ora di trarre una conseguenza dai risultati sopra ottenuti.

Si supponga che alcune o tutte le $M_{p,s}$ tendano a valori $\bar{M}_{p,s}$, per cui $\mathcal{E}$ diventi semidefinita positiva e l'equazione che determina α si abbassi di grado. Allora alcune α (che indicheremo con β) tenderanno all'infinito, ovviamente, per valori reali; altrimenti dovrebbero soddisfare alla (19) e rimanere così sempre limitate in modulo. Siccome poi i valori reali di α non possono essere che negativi, si conclude che, se $M_{p,s}$ tende a $\bar{M}_{p,s}$, le β tendono all'infinito per valori reali negativi.

Questo teorema contiene, e perciò dimostra, l'ipotesi del FUBINI-GHIRON accennata in principio. Egli ha ammesso questo: quando $M_{p,s}$ tende a $\bar{M}_{p,s}$, le parti reali di β tendono a $-\infty$. Da quanto abbiamo dimostrato risulta dunque non solo provata l'ipotesi in discorso, ma anche precisato il comportamento della parte immaginaria delle β .