Bollettino
Unione Matematica
Italiana

I. Opatowski

Riposta alla domanda pubblicata nel T. XVI del "Bollettino", pag. 200

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.5, p. 242–243.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_242_0>

CORRISPONDENZA

RISPOSTA

alla domanda pubblicata nel T. XVI del « Bollettino », pag. 200.

È stato proposto il problema di dimostrare che ogni integrale $y(x)$ dell'equazione

$$xy'' + y' - xy = 0, \tag{1}$$

che sia infinitesimo all'infinito, verifica la relazione

$$\int_0^\infty y^2 dx = \left(\frac{\pi}{2}\int_0^\infty xy\,dx\right)^2. \tag{2}$$

Supponiamo che x e y siano variabili reali e osserviamo anzitutto che la soluzione generale della (1) è una funzione cilindrica di ordine 0 e di argomento ix, cioè $C_0(ix)$. [(1) p. 214]. Ora, la più generale funzione $C_0(ix)$ che sia reale per valori positivi di x e che si annulli all'infinito è (a meno di un fattore costante arbitrario) $y = iH_0^{(1)}(ix)$, dove $H_0^{(1)}$ è la funzione di HANKEL di prima specie e di ordine 0 [(1) p. 199; (2) pp. 18 e 155]. Applicando ora due relazioni generali sulle funzioni di HANKEL, che N. NIELSEN indica nel suo trattato di funzioni cilindriche (2) è facile dimostrare che ciascun membro della (2) è $= 1$. Le relazioni in questione sono [(2) pp. 190 e 215]:

$$\int_0^\infty H_\nu^{(1)}(itx)\cdot x^\rho dx = \frac{2^\rho(-i)^{\nu+1}}{\pi t^{\rho+1}}\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right), \tag{3}$$

$$-\frac{4i}{\pi}\int_z^\infty \frac{H_{2\nu}^{(1)}(2tix)}{\sqrt{t^2-z^2}}\,dt = [H_\nu^{(1)}(zix)]^2. \tag{4}$$

(1) E. JAHNKE e F. EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*. Leipzig (1933), 2ª ed..

(2) N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*. Leipzig, Teubner (1904).

Ponendo nella (3) $\nu=0$, $\rho=t=1$ si vede facilmente che

$$\int_0^\infty xy\,dx=\int_0^\infty ixH_0^{(1)}(ix)\cdot dx=\frac{2}{\pi}\Gamma(1)\cdot\Gamma(1)=\frac{2}{\pi},$$

quindi il secondo membro della (2) è $=1$. Per calcolare il primo membro della (2) poniamo nella (4) $\nu=0$, $z=1$, allora si ha:

$$\int_0^\infty y^2dx=\int_0^\infty [iH_0^{(1)}(ix)]^2\cdot dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty dx\int_1^\infty \frac{iH_0^{(1)}(2tix)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\frac{4}{\pi}\int_1^\infty\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}\int_0^\infty iH_0^{(1)}(2tix)\cdot dx,$$

(potendosi evidentemente scambiare l'ordine delle integrazioni a causa della finitezza di $H_0^{(1)}$).

L'integrale rispetto a x si calcola con la (3) ponendovi $\nu=\rho=0$ e $t\rightarrow 2t$, ricordando inoltre che $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, esso risulta $=1/2t$. Quindi:

$$\int_0^\infty y^2dx=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1}\right]_1^\infty=1.$$

Torino, 2 Dicembre 1937-XVI.

I. OPATOWSKI