Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni

* J. F. Koksma : Diophantische Approximationen (B. Levi)
* M Nicolesco: Les fonctions polyarmoniqes (G. Lampariello)
* R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen (Giovanni Sansone)
* E. Kaehler: Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen (B. Levi)
* Hélène Freda: Méthode des Caractéristiques pour l'integration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques (B. Levi)
* Lucien Godeaux: Les géométries (B. Levi)
* É. Cartan: Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective (Enea Bortolotti)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.5, p. 228–241.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_228_0>

RECENSIONI

J. F. KOKSMA: *Diophantische Approximationen.* Ergebnisse der Mathematik u. ihrer Grenzgebiete. Bd. IV, 4. Berlin, Springer, 1936, p. 157. R.M. 18.40.

Il MINKOWSKI, cui si deve la prima delineazione di un corpo di dottrina sotto il nome di *approssimazioni diofantiche* [1], ne enuncia il contenuto come « l'approssimata risoluzione di equazioni nelle quali le costanti possono essere grandezze qualsiansi, mentre i valori delle incognite debbono essere interi »: in verità non si tratta generalmente della determinazione di queste approssimate soluzioni intere (problema d'altronde indeterminato finchè non sia nota l'approssimazione richiesta) bensì di ricerche intorno alla massima approssimazione raggiungibile quando ai valori interi delle variabili si impongano convenienti limitazioni, generalmente quella di non superare, in modulo, un numero assegnato. Già il MINKOWSKI osservava come ne emergesse una metodica per penetrare i più riposti problemi della moderna teoria dei numeri: il volumetto del KOKSMA, conservando perfetta fedeltà alla definizione del MINKOWSKI, mostra bene come sotto questo titolo venga a coordinarsi quasi per intero la teoria aritmetica dei numeri irrazionali; e per dare un'idea dell'ampio materiale di studi considerato, basti notare che l'accurato indice bibliografico occupa nel volume ben 29 pagine!

L'argomento trattato è delineato nell'introduzione coll'enunciazione di due problemi fondamentali consistenti, nell'avvicinare mediante convenienti espressioni analitiche — la suddetta massima approssimazione dal disotto e dal disopra: così è ben noto dalle più elementari proprietà delle frazioni continue che ogni irrazionale α si può approssimare mediante frazioni $\dfrac{p}{q}$ con errore $< \dfrac{1}{q^2}$: ma ricerche più affinate (HURWITZ, BOREL, PERRON, ecc.)

[1] *Diophantische Approximationen, eine Einführung in die Zahlentheorie.* Leipzig, Teubner, 1907: nell'indice bibliografico questo aureo libretto del MINKOWSKI si trova registrato colla data anacronistica della ristampa, 1927.

assegnano per questa approssimazione il più ristretto valore $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, e più ristretto ancora per classi particolari di irrazionali: reciprocamente è noto (LIOUVILLE) che ad ogni irrazionale algebrico di grado g corrisponde un c tale che detta approssimazione non può superare $\frac{1}{cq^g}$: ma la proposizione è notevolmente rafforzata dalle ricerche di THUE e di SIEGEL. Il problema dell'approssimazione si amplia naturalmente dalla considerazione di singoli irrazionali a quella di espressioni composte con questi: in particolare, considerando combinazioni lineari di potenze intere di un numero, si giunge a criteri di trascendenza, di cui il più ampio, sebbene (conseguentemente) insufficientemente adatto a pratiche applicazioni, è che affinchè un numero ξ sia trascendente occorre e basta che, per ogni numero Ω esista un n tale che l'espressione $L = x_0 + x_1\xi + \ldots + x_n\xi^n$ possa prendere valori minori di $t^{-\Omega}$, ma non $= 0$, per valori interi delle x_i di valore assoluto $< t$.

Il mezzo di ricerca che ha mostrato dapprima la sua potenza per opera del MINKOWSKI è quello della *geometria dei numeri*, di cui il « principio di ripartizione » (*Schubfachprinzip*) è l'esempio più semplice e più antico: a questo, colle sue estensioni, è destinato il II capitolo. I seguenti capitoli III, IV trattano dell'approssimazione di un numero, essendo raccolti nel III i risultati che si collegano principalmente alla teoria delle frazioni continue e nel IV le estensioni di questa e le questioni di irrazionalità e di trascendenza; il cap. V si riferisce all'approssimazione dei sistemi di numeri. I capitoli seguenti (VI a X) trattano della distribuzione dei resti (mod. 1) di funzioni di numeri interi: i capitoli VI e VII sono dedicati al caso lineare, i seguenti a funzioni qualunque e alle considerazioni asintotiche.

Nel suo insieme il libro, per l'ampiezza delle notizie, la loro coordinazione unitaria ed il loro completo aggiornamento, presenta un vivo interesse, quantunque, per la ristrettezza dello spazio, non dispensi nel maggior numero dei casi dal ricorrere alle fonti.

B. LEVI

M. NICOLESCO: *Les fonctions polyharmoniques*. Exposés sur la théorie des fonctions publiés sous la direction de PAUL MONTEL, IV fasc., Paris, Hermann, 1936.

Questa Monografia contiene una sintesi accurata delle principali proprietà delle funzioni armoniche e poliarmoniche di un numero qualunque di variabili.

Posto

$$\Delta^0 = 1, \quad \Delta = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \Delta^s = \Delta(\Delta^{s-1}), \qquad s = 1, 2, \ldots$$

dicesi *poliarmonica di ordine p* [1] ogni soluzione dell'equazione

$$\Delta^p u = 0.$$

Le funzioni armoniche di 2° ordine o biarmoniche hanno un ufficio notevole nella teoria matematica dell'elasticità (AIRY, MATHIEU, ALMANSI, BOGGIO, LAURICELLA, LEVI-CIVITA, MARCOLONGO, VOLTERRA). La loro proprietà più importante è contenuta nel teorema di ALMANSI, il quale riconduce il loro studio a quello delle funzioni armoniche e l'analisi del principale problema al contorno che si pone in Elasticità è dovuta al LAURICELLA.

Per lungo tempo lo studio delle funzioni biarmoniche è stato coltivato specialmente dalla scuola italiana e dominato dal solo punto di vista della Fisica matematica (che si è sempre mostrato tra i più fecondi per lo sviluppo dell'Analisi). Ma in tempi recenti si nota la tendenza ad approfondire sistematicamente le proprietà delle funzioni poliarmoniche dal punto di vista astratto dell'Analisi pura, così come già era avvenuto per l'equazione del LAPLACE.

Il NICOLESCO espone qui, nel quadro della teoria ormai classica delle funzioni armoniche e biarmoniche, i suoi apprezzabili risultati sull'armonicità d'ordine superiore e quelli di numerosi altri Autori.

La Monografia è divisa in tre capitoli nei quali vengono trattate rispettivamente le proprietà locali, i campi non limitati di armonicità e i problemi al contorno del LAURICELLA e del RIQUIER.

Non è fatto cenno della seguente proprietà che risulta dalla formola di BOGGIO e costituisce un attributo essenziale dell'analiticità delle funzioni armoniche di qualunque ordine.

Due funzioni $u_1(M)$, $u_2(M)$ armoniche di ordine p rispettivamente nei domini D_1, D_2 aventi una parte σ di frontiera comune, dotata di normale in ogni punto, che soddisfano su σ alle condizioni

$$\begin{aligned} \Delta^s u_1 &= \Delta^s u_2 \\ \frac{d\Delta^s u_1}{dn_1} &+ \frac{d\Delta^s u_2}{dn_2} = 0 \end{aligned} \qquad (s = 0, 1, \ldots, p-1)$$

(n_1, n_2 versori normali a σ interni a D_1, D_2) costituiscono un'*unica* funzione armonica di ordine p in $D_1 + D_2$.

[1] Per semplicità, si potrebbe dire « armonica di ordine p ».

Questo teorema conduce a domandarsi se, essendo $u_1(x_1, ..., x_n)$ armonica di ordine p, la funzione

$$u_2 = \frac{1}{r^{n-2p}} u_1\left(\frac{x_1}{r^2}, ..., \frac{x_n}{r^2}\right), \qquad r^2 = \sum_1^n {}_i\, x_i^2$$

che è anche tale, sia la continuazione analitica di u_1 attraverso la ipersuperficie sferica di raggio unitario.

Per le funzioni armoniche si trova che la funzione u_1 dev'essere omogenea di grado $K = -\,{}^1/_2(n-2)$.

In particolare, le funzioni armoniche di due variabili debbono essere omogenee di grado zero.

Poichè queste sono tutte contenute nell'espressione

$$u(x, y) = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + b, \qquad (a, b \text{ costanti})$$

si riconosce che l'inversione rispetto a un cerchio *non* prolunga analiticamente le funzioni cui è applicata, eccetto il caso or ora indicato.

Osservo che il teorema precedente vale anche per le funzioni metarmoniche, soluzioni dell'equazione

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

come risulta dall'estensione di HELMHOLTZ della formola di GREEN ed è valido per ogni equazione a derivate parziali di tipo ellittico completamente lineare, le cui soluzioni, come è noto, sono necessariamente analitiche.

G. LAMPARIELLO

R. WEYRICH: *Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen*; pagine IV+137; B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1937. Prezzo (rilegato) R.M. 7.60.

L'A. ha sostituito al volume della collezione « Teubner » di P. SCHAFHEITLIN sulle funzioni di BESSEL, ora esaurito, un nuovo volume che ben corrisponde alle moderne esigenze dei matematici, dei fisici e dei cultori di matematica applicata. In 137 pagine, nel modo più semplice e più chiaro ha raccolto felicemente le principali proprietà delle funzioni cilindriche.

Punto di partenza della trattazione è la teoria delle onde cilindriche che permette all'A. di arrivare in modo rapido alle rappresentazioni integrali delle funzioni cilindriche di BESSEL, HANKEL, NEUMANN.

Nei capitoli 4 e 5 ha particolarmente studiato le rappresentazioni asintotiche di HANKEL, DEBYE, NICHOLSON, WATSON; si tratta di risultati di comune impiego nelle applicazioni e di grande importanza per gli sviluppi in serie di funzioni cilindriche.

Particolarmente interessante è l'ultimo capitolo del volume, il dodicesimo, destinato ad alcune notevoli applicazioni delle funzioni cilindriche, a problemi di dinamica e a problemi sulla conduzione del calore e sulle onde elettromagnetiche.

Il lettore, cui sono richieste, per la comprensione del volume, le nozioni generali di analisi del nostro primo biennio e gli elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche, potrà a lettura ultimata valersi correntemente nelle applicazioni delle ben note *Funktionentafeln* di JAHNKE-EMDE (Leipzig, 1933), mentre al matematico puro, per gli ulteriori approfondimenti è resa agevole la lettura del classico trattato di G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge, 1922); il volume appartiene quindi a quella notevole categoria di pubblicazioni imposte dalle moderne esigenze che per i teorici significano adeguata iniziazione allo studio dei trattati e per i matematici applicati un potente strumento di lavoro. GIOVANNI SANSONE

E. KAEHLER: *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen.* Hamburger mathematische Einzelschriften. 16 Heft, Leipzig-Berlin, Teubner, 1934, p. 80+IV. RM. 3 (ril. 3,75).

La teoria delle forme ed equazioni pfaffiane è stata estesa dal CARTAN alle forme differenziali di ordine superiore, ricavandone un calcolo simbolico il quale, mediante l'uso di un'algebra vettoriale (prodotti alterni), coordina in una veduta generale la trattazione dei principali problemi sui sistemi di equazioni alle derivate parziali nel dominio analitico. Nel volumetto in esame l'A. ci presenta una esposizione di tale ordine d'idee, cui dà particolare interesse il linguaggio formale aritmetico e l'interpretazione geometrica tenuta costantemente presente: egli perviene così ad una trattazione approfondita principalmente dal lato algebrico del problema dell'integrazione, che egli esamina anche nei particolari del calcolo effettivo: è invece nella sostanza del metodo che le questioni più strettamente analitiche della riduzione dei sistemi a forma completamente integrabile e della convergenza debbono essere supposti risoluti nell'indirizzo loro proprio, onde il titolo risulterebbe forse più proprio ove, seguendo per es. il GOURSAT, si richiamasse direttamente alle forme pfaffiane. Per più esatta indicazione degli argomenti trattati e del loro svolgimento, riproduciamo, con qualche libertà di traduzione, l'indice dei capitoli: L'anello delle forme differenziali. - Premesse funzionali e geometriche. - Varietà integrali ed elementi integrali. - Teoremi d'esistenza - Osservazioni sui calcoli relativi ai precedenti sviluppi.

– Applicazioni ed esempi. – Linee fondamentali della teoria dei gruppi di LIE. B. LEVI

HÉLÈNE FREDA: *Méthode des Caractéristiques pour l'integration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques,* avec une préface de VITO VOLTERRA. « Mémorial des sciences mathématiques », Fasc. LXXXIV. Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 82.

L'integrazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari iperboliche che l'HADAMARD ha chiamato di tipo normale (e cioè a conoide caratteristico ellittico) è uno dei più eleganti ed istruttivi capitoli della teoria delle equazioni differenziali nel dominio reale, venuto a compimento nell'ultimo decennio del secolo scorso e nei primi lustri di questo secolo: mentre, dopo la classica opera di RIEMANN, le ricerche di PICARD e HADAMARD mettevano in chiara luce l'importanza e l'ufficio delle caratteristiche nella determinazione delle soluzioni, le geniali intuizioni del VOLTERRA, seguite dalle ricerche di TEDONE, D'ADHEMAR, COULON, HADAMARD permettevano, mediante la considerazione dei conoidi caratteristici, di giungere ad una esatta classificazione e alla risoluzione dei nuovi problemi che presenta il caso di tre o più variabili. Manca tuttavia una trattazione d'insieme la quale tenga conto dei varî indirizzi, poichè i trattati fondamentali di HADAMARD e di PICARD hanno ancora prevalentemente forma monografica. A tale difetto viene incontro il presente fascicolo del « Mémorial », nei limiti consentiti dallo spazio ristretto: dopo un breve capitolo introduttivo, si espongono nel secondo capitolo le ricerche relative al caso di due variabili, nel terzo quelle del VOLTERRA per le equazioni della forma $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x_1 x_2 x_3)$, nel quarto le estensioni di TEDONE, COULON, D'ADHEMAR per equazioni in un numero qualunque di variabili (ed anche non di tipo normale): infine nel capitolo quinto si espongono i metodi e i risultati di HADAMARD per le equazioni generali di lipo iperbolico normale totalmente lineari.

Chiude il fascicolo un indice bibliografico abbastanza esteso, che però, data l'importanza dell'argomento, potrebbe desiderarsi più completo e con più precisi richiami nei passi del testo. B. LEVI

LUCIEN GODEAUX: *Les géométries.* Paris, Armand Colin, 1937, in 8°, p. 216.

Una rapida corsa attraverso l'evoluzione del nome « geometria », dai greci (per non dire gli egiziani, che il nome non avevano ancora coniato) a noi, contenuta per quanto riguarda la preparazione culturale, nei limiti di quella di un licenziato dalle scuole medie: questo il programma che l'A. si è proposto ed ha perfettamente realizzato e posto in evidenza col plurale del titolo.

Il volumetto si compone di sei capitoli: Nel primo « La geometria elementare » si parla dell'indirizzo sintetico-elementare caratteristico della geometria greca, da PITAGORA a EUCLIDE a APOLLONIO, e di cui ultimi rappresentanti possono considerarsi, per la teoria delle coniche, i due geometri belgi QUETELET e DANDELIN; nel secondo « La geometria analitica » si segue il metodo delle coordinate dalla sua nascita come rappresentazione grafica con NICOLA ORESME fino all'inizio della geometria algebrica e differenziale; il terzo « La geometria proiettiva » ci porta dalle ricerche sulle coniche di DESARGUES, di DE LA HIRE e LE POIVRE, fino a STAUDT e a CHASLES; seguono altri tre capitoli rispettivamente sui « principii della geometria », « la geometria e la teoria dei gruppi », « la topologia », per modo che, mentre ognuno presenta lo svolgimento storico di una delle idee direttrici delle ricerche geometriche, i varî capitoli, nella loro successione, offrono pure un quadro temporale della evoluzione di queste idee e del gusto dominante: onde il libro costituisce una piacevole lettura e, per il principiante, un'ottima guida d'orientamento, al quale scopo concorre una breve bibliografia, limitata, com'è naturale, alle più significative e recenti opere d'insieme. B. LEVI

É. CARTAN: *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective.* (Fasc. XVII dei « Cahiers Scientifiques »). Paris, Gauthier-Villars, 1937, pp. VI+308.

Questo volume riproduce un corso di lezioni tenuto a Parigi nel 1934-35 dall'eminente Geometra. Come questi sia uno dei principali ispiratori e artefici dei nuovi orientamenti e sviluppi della Geometria Differenziale, è ben noto: ma va rammentato che proprio egli stesso ha dato inizio (1) alla teoria delle connessioni proiettive, oggetto della presente opera.

Il corso ha carattere monografico, ma anche spiccatamente personale. Senza raffronti o riferimenti all'ulteriore letteratura dell'argomento (2), l'A. riprende e svolge qui in sostanza ancora le

(1) Ved.: *Sur les variétés à connexion projective.* « Bulletin Soc. Math. de France », 52, 1924, pp. 205-241.

(2) Per la letteratura anteriore al 1931 rimando a una mia « Relazione » in questo « Bollettino »: 9, 1930, pp. 288-294; 10, 1931, pp. 28-34, 83-90. Indicazioni ulteriori si trovano sia nell'indice Bibliografico che accompagna questo volume del CARTAN (p. 303) che nella Bibliografia della Me-

sue primitive vedute: ma l'attuale esposizione (qui data nella Parte II del volume), oltre a presentare interessanti semplificazioni e perfezionamenti, è anche grandemente arricchita di nuovi risultati, di applicazioni, interpretazioni che ampliano la portata della teoria, ne chiarificano l'essenza e le dànno un assetto più omogeneo e organico. Particolarmente notevole è il ravvicinamento, quasi l'unificazione della nuova teoria, volta agli spazi proiettivi *curvi*, con l'ordinaria geometria proiettiva differenziale che studia gli enti situati entro spazi proiettivi *piani*. Proprio a quest'ultima geometria del resto l'A. ha dedicato tutta la Parte I e cioè oltre la metà del volume: questo allo scopo di fissare le basi, sia analitiche che geometriche, necessarie per gli sviluppi che seguono; e anche per saggiare su enti meno complessi i metodi d'indagine adottati: soprattutto quello del « riferimento mobile ».

L'opera, come del resto tutta la produzione geometrica del CARTAN, è concepita ed esposta con suggestiva chiarezza. Senza dubbio l'A. *vede* — con una forza d'intuizione e penetrazione non meno ammirevole del suo singolare virtuosismo algoritmico — e presenta anche al lettore innanzi tutto e in modo spesso preminente l'aspetto *analitico* delle questioni trattate. Su questo modo di sentire e gustare, e quindi di esporre, una teoria *geometrica*, si può anche non essere in tutto d'accordo con l'A.: deve però riconoscersi che nell'impostazione e nello sviluppo di ogni singola questione da lui trattata il substrato geometrico sempre traspare con nitida perspicuità: e chiarifica ed indirizza il processo analitico.

La I Parte comincia con un Capitolo (I) sulla geometria differenziale proiettiva *dei movimenti sulla linea retta*. Lo studio delle proprietà proiettive dei movimenti, e in particolare la ricerca dei movimenti proiettivamente eguali, vengono trattati con diversi procedimenti analitici che in parte hanno poi il loro riscontro in analoghi procedimenti applicati allo studio proiettivo delle curve nel piano e delle superficie nello spazio: sta in questo il loro precipuo interesse. Intendo alludere alla rappresentazione dell'ente studiato, nel gruppo delle trasformazioni proiettive (o almeno, di quelle omografiche) *con equazioni differenziali*: cui sono soggette

moria pubblicata da me e dal collega V. HLAVATY nel tomo XV, serie IV (1936) degli « Annali di Matematica », pp. 1-45, 129-154. Sono da aggiungere la Nota *On the projective geometry of paths* di L. BERWALD (« Annals of Mathem. », 37, 1936, pp. 879-898); un'altra recentissima, con lo stesso titolo, di J. HAANTJES (« Proceedings of the Edinburgh Mathem. Society » (2) 5, 1937, pp. 103-115) e due lavori del CARTAN che citerò più innanzi.

le coordinate proiettive dei suoi punti, convenientemente normalizzate: e al metodo del «riferimento mobile», che con opportuni adattamenti è posto dall'A. a base di ricerche nei campi più svariati della Geometria.

Sulla linea retta il riferimento mobile (proiettivo) è costituito da una coppia di punti *analitici* A, A_1, funzioni dell'istante variabile, del tempo in cui il supposto movimento si svolge. Elemento fondamentale del metodo è la costruzione di una equazione (di RICCATI) esprimente la condizione perchè un punto, mobile rispetto al riferimento mobile, sia *fisso* sulla retta.

Riprendendo qualche punto di un programma da lui assai più ampiamente sviluppato in un libro dedicato alla geometria proiettiva complessa (¹), l'A. dà poi un cenno dello studio di una curva (o *filo*), luogo di ∞^1 punti della retta complessa, nella geometria *proiettiva* di questa: che, in quanto siano dati la discriminazione dei punti reali da quelli complessi, e quindi l'asse reale e la nozione di «catena», è in realtà una geometria *non-euclidea* piana iperbolica rappresentata al modo di POINCARÉ.

Nel Cap. II l'A. passa a studiare, con notevole ampiezza di sviluppi e varietà di procedimenti, la geometria proiettiva differenziale delle curve nel piano proiettivo (reale). Introdotto per via analitica l'*arco proiettivo* di una curva piana, l'A. dà la ragion d'essere geometrica dell'esistenza di questo invariante, riconducendosi a un assai interessante «sviluppo proiettivo» di una curva piana qualunque su una conica: che permette di trasportare dalla conica alla curva la nozione di birapporto e quindi la costruzione di un parametro proiettivo (il che anche per una curva entro un ambiente proiettivo *a più dimensioni* per altra via è stato ottenuto dal BOMPIANI (²)). Precisamente: da ciascun punto A della curva C per proiezione si rappresenta la conica osculatrice (a contatto 5-punto) in A a C su quella che oscula C in un punto infinitamente vicino ad A: per integrazione ne risulta una legge di rappresentazione (proiettiva) fra due qualunque coniche osculatrici a C: e viene determinata una famiglia ∞^1 di curve, luogo dei punti corrispondenti sulle singole coniche: le *evolventi proiettive di prima specie* di C. Queste evolventi rappresentano su una determinata conica osculatrice non solo le altre coniche, ma *anche la*

(¹) É. CARTAN, *Leçons sur la géométrie projective complexe*. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

(²) Ved. E. BOMPIANI, *Sulla normalizzazione delle equazioni differenziali lineari*. «Rendiconti Acc. Lincei», (6), 23, 1936, pp. 807-812.

stessa curva C (o una sua conveniente porzione); si ha così uno *sviluppo proiettivo* di C sulla conica.

Lo studio delle evolventi proiettive di prima specie e delle loro curve *duali* consente all'A. di precisare in modo semplice ed espressivo *l'effetto di una correlazione sull'arco proiettivo* di una linea piana. L'A. introduce poi anche altre due sorta di famiglie di curve proiettivamente legate a una curva piana, che egli dice *evolventi proiettive di seconda e di terza specie*: le quali certo meritano di essere ulteriormente studiate.

Introdotta (analiticamente) la nozione di *curvatura proiettiva* di una linea piana, l'A. riprende poi lo studio proiettivo delle curve nel piano dall'inizio, col metodo del riferimento mobile. Lo studio dei riferimenti che possono proiettivamente legarsi agli intorni degli ordini 1, 2,..., 6 di un punto della curva conduce, attraverso a un procedimento di successive particolarizzazioni che si conclude con la determinazione del riferimento *intrinseco*, in modo naturale ed espressivo a ritrovare i due invarianti proiettivi fondamentali e a stabilire per le curve piane la rappresentazione intrinseca proiettiva.

Scritte poi le « equazioni di struttura » del gruppo proiettivo nel piano e più in generale in S_n proiettivo, cioè le condizioni differenziali cui debbono soddisfare le forme pfaffiane ω_α^λ perchè il sistema delle « formule di FRENET » $dA_\alpha = \Sigma\, \omega_\alpha^\lambda A_\lambda$ $(\alpha = 0, \ldots, n)$ possa rappresentare uno spostamento infinitesimo del riferimento che ha i punti analitici A_α come fondamentali, l'A. applica le equazioni di struttura a trovare una nuova soluzione, concettualmente più semplice, del problema dell'associazione di un riferimento proiettivo intrinseco al punto che percorre una curva piana.

L'ampiezza degli sviluppi dedicati alle curve piane risponde specialmente a scopi didattici: serve a porre in risalto l'essenza del metodo del riferimento mobile e il suo modo di applicazione.

Meno ampia è l'esposizione che nel seguente Cap. III l'A. dà sulla geometria proiettiva differenziale *delle superficie in* S_3. Ricavato, per via analitica, il riferimento che dà alla superficie la rappresentazione locale $z = xy - \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \ldots$, l'A. deduce, dall'invarianza delle parti principali di x ed y in un cambiamento infinitesimale del riferimento che non alteri la forma dello sviluppo ora accennato, l'invarianza di xy e di $x^3 + y^3$ e quindi l'esistenza delle due forme normali del FUBINI: in sostanza, e a parte l'aspetto puramente analitico qui adottato, il procedimento è assai vicino a quello del BOMPIANI, che fa dipendere le forme del FUBINI dalle sue « forme elementari ». L'A. passa poi al riferimento intrinseco del 4° ordine, ed è condotto a caratterizzare qualcuno degli elementi geometrici che all'intorno del 4° ordine si collegano: come le direttrici di WILCZYNSKI, la quadrica di LIE. Ritrova poi, col solito processo di successiva particolarizzazione del riferimento mobile, attraverso allo studio dei riferimenti di 1°, 2°, 3° ordine quello intrinseco legato all'intorno del 4° ordine. Svariate interessanti applicazioni del metodo del riferimento mobile dà poi l'A. allo studio delle applicabilità proiettive; ad es. stabilisce questo teorema (p. 154): date due superficie proiettivamente applicabili, se una di esse viene proiettivamente mutata in una superficie a contatto del 4° ordine con l'altra, i punti omologhi delle due superficie infinitamente vicini ai punti fatti coincidere, *coincidono fra loro con uno scarto del 3° ordine.* Sul problema generale della deformazione proiettiva delle superficie secondo FUBINI (oggetto anche di una nota ricerca dell'A.) si ha qui soltanto un cenno.

Nella II Parte l'A. viene infine a trattare *gli spazi a connessione proiettiva.* Ne dà una prima idea (nel Cap. I) costruendo la particolare connessione proiettiva che su una superficie σ di S_3 viene determinata mediante l'associazione di punti dell'S_3 ambiente ai punti di σ, non situati nei piani ivi tangenti a σ: quali centri da cui tali piani vengono proiettati sui piani che toccano la superficie nei punti infinitamente vicini. Indi l'A. passa alla nozione generale di spazio (a n dimensioni) a connessione proiettiva: *varietà al cui punto generico* A *sono associati uno spazio proiettivo contenente* A, *in esso un riferimento* A_α *di cui* $A \equiv A_0$ *fa parte, e un sistema di forme pfaffiane* $\omega_\beta^\alpha = \Pi_{\beta i}^\alpha du^i$, mediante le quali vengono localizzati, con equazioni $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$, l'uno rispetto all'altro i riferimenti associati ad A e al punto infinitamente vicino $A + dA$. Dare una simile legge di trasporto del riferimento, o invece la corrispondente legge di trasporto proiettivo dei punti (che pel punto $x = x^\alpha A_\alpha$ sarà rappresentata dalle formule $dx^\beta + \omega_\alpha^\beta x^\alpha = 0$) è sostanzialmente lo stesso: e io veramente non trovo che il primo procedimento sia preferibile. Le equazioni accennate dànno, per integrazione lungo una curva, lo sviluppo (a meno di omografie) della totalità dei riferimenti associati ai punti di una curva — e in particolare, *lo sviluppo della curva* medesima — sullo spazio proiettivo associato ad un punto della curva. Mediante questo sviluppo tutte le proprietà differenziali, riguardanti intorni di punti e di curve su di uno spazio a connessione proiettiva, *si riconducono a proprietà riguardanti enti di uno spazio proiettivo*: ad es. le proprietà differenziali *di una curva* di una varietà a connessione proiettiva sono le proprietà proiettive (comuni) degli sviluppi di quella curva sugli spazi proiettivi associati ai suoi punti.

L'A. pone e risolve il problema della trasformazione delle ω_β^α per un arbitrario cambiamento dei riferimenti sotto questa forma: *come possono variare le* ω_β^α *senza che mutino le proprietà delle curve dello spazio a connessione proiettiva.* Nel seguito però egli utilizza soltanto le trasformazioni *infinitesimali* del riferimento e quindi delle ω_β^α. L'arbitrarietà del riferimento può utilizzarsi per la costruzione di un riferimento *naturale, intrinsecamente determinato,* dalla connessione proiettiva e da un riferimento curvilineo per la varietà. sui singoli spazi proiettivi associati ai punti di questa: come già nel lavoro del 1924 il CARTAN aveva osservato.

L'A. viene quindi a introdurre, con espressive costruzioni geometriche, e a studiare le nozioni di *curvatura* e *torsione*, per le quali si differenziano gli spazi a connessione proiettiva da quelli proiettivi ordinari; assai chiaramente pone in luce come si colleghi il fatto dell'esistenza di coordinate locali « geodetiche » con la possibilità di una applicazione del 2° ordine fra gli intorni di un punto in uno spazio a connessione proiettiva e di un punto in uno spazio proiettivo ordinario, nel caso in cui vi è torsione; di una applicazione del 3° ordine, se il primo spazio è senza torsione. L'applicazione del 4° ordine (come l'A. accenna a p. 193), almeno se $n > 2$, può aversi soltanto se lo spazio a connessione proiettiva si riduce in realtà esso stesso a uno spazio proiettivo.

Per uno studio più approfondito delle nozioni di curvatura e torsione l'A. svolge poi (Cap. III) una sorta di *calcolo tensoriale* per gli spazi a connessione proiettiva da lui introdotto in lavori recenti [1]. La concezione di *tensore* cui l'A. si attiene è qualche cosa di assai più generale della veduta ordinariamente adottata: per l'A. è un tensore *un sistema multiplo a un qualunque numero di componenti che, per effetto di una trasformazione sui riferimenti* (che ne lasci fermi i punti A_0, cioè le origini) *hanno una legge di trasformazione lineare*: sotto la sola condizione che tali trasformazioni lineari *formino un gruppo, isomorfo al gruppo di trasformazioni subite dai riferimenti.* In particolare l'A. considera i vettori (affini) controvarianti e covarianti ad n componenti, e i « vettori analitici », controvarianti e covarianti, ad $n+1$ componenti (che sono secondo l'usuale terminologia *vettori proiettivi*): e ne dà in-

[1] É. CARTAN, *Le calcul tensoriel projectif.* « Matematiceskii Sbornik », Mosca, 1935, t. 42, pp. 131-148; *L'extension du calcul tensoriel aux géométries non-affines,* « Annals of Mathem. », 38, 1937, pp. 1-13.

terpretazioni geometriche. Dà poi una sorta di « derivazione covariante », legata a una nozione di « traslazione » di cui forse è desiderabile veder meglio chiarita l'intima ragion d'essere, in una teoria *proiettiva*. Quella derivazione dà, applicata a un tensore [1], non già un nuovo tensore, ma un sistema che *insieme al tensore primitivo*, cui l'operazione è applicata, costituisce un tensore (tensore *prolungato* del primitivo). A tale nuovo tensore la derivazione covariante è ancora applicabile, ecc.. Le relazioni fra il procedimento di derivazione del CARTAN e le « derivazioni proiettive » variamente introdotte da molti ricercatori [2] possono presentare interesse: il ragguaglio non è stato fatto.

L'A. applica il suo calcolo tensoriale a varie ricerche concernenti le proprietà *intrinseche* di uno spazio a connessione proiettiva: particolarmente egli mostra come un tale spazio *sia intrinsecamente determinato dalla conoscenza dei valori numerici delle componenti, in un punto* O, *del tensore di curvatura e torsione e delle sue derivate covarianti successive, relativamente a un riferimento d'origine* O.

Nel Cap. IV l'A. viene a dare, col loro significato geometrico, le relazioni differenziali necessarie che legano le componenti del tensore di curvatura e torsione: *identità* di BIANCHI generalizzate; per questo fa ricorso, oltrechè al calcolo tensoriale sopra accennato, anche al « calcolo differenziale esteriore », strumento di molte sue ricerche: del quale egli qui richiama alcune nozioni e teoremi.

Presenta poi, nel Cap. V, sotto l'aspetto di una geometrizzazione di certe equazioni o sistemi differenziali del 2° ordine, la nozione a lui dovuta di *connessione proiettiva normale* [3]. Di qui naturalmente egli è condotto a parlare del problema della *rappresentazione geodetica piana* delle superficie, risolto, come è ben noto, dal nostro BELTRAMI: ma che ora nella teoria delle connessioni proiettive trova il suo ambiente naturale. Ecco l'aspetto che acquista il teorema di BELTRAMI: Una superficie è rappresentabile geodeticamente sul piano *se si annulla la curvatura della connessione*

[1] Nel libro l'applicazione è limitata a casi particolari; la generalizzazione accennata nel primo dei due lavori poco sopra citati (a p. 143) per un errore di stampa non è ben chiara.

[2] Su queste potrà consultarsi, anche per la bibliografia, la citata Memoria di BORTOLOTTI-HLAVATY (1936).

[3] A una geometrizzazione dell'equazione $v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3$ è giunto, seguendo un assai diverso orientamento, il BOMPIANI nel 1926: ved. anche per le citazioni di precedenti lavori la Nota a pp. 154-159 del vol. IX, 1930 di questo « Bollettino ».

proiettiva normale determinata dalle sue geodetiche: il che equivale a dire appunto che è costante la curvatura totale (metrica) della superficie.

Particolare carattere di novità presentano gli ultimi due Capitoli della II Parte. Nel VI l'A. dà un'assai notevole applicazione della teoria generale, studiando i primi elementi *di geometria differenziale di una superficie immersa in uno spazio a connessione proiettiva a tre dimensioni*: fra l'altro dando estensioni delle *asintotiche*, dei *sistemi coniugati* (in relazione ai quali egli trova le condizioni perchè nello spazio su ogni superficie la proiettività delle direzioni coniugate sia una *involuzione*); delle *superficie totalmente geodetiche,* delle *tangenti di* DARBOUX. Nel Cap. VII, passando dallo studio differenziale a considerazioni al finito, l'A. introduce il « gruppo d'olonomia » di uno spazio a connessione proiettiva: gruppo delle trasformazioni omografiche di uno qualunque degli spazi proiettivi associati in sè, determinate *dallo sviluppo dei cicli finiti* uscenti dal punto che si considera. Estesa la rappresentazione analitica delle connessioni proiettive con l'introduzione di riferimenti che non hanno necessariamente, sullo spazio proiettivo associato al punto generico, questo come uno dei punti fondamentali, l'A. dimostra che è sempre possibile fare dei riferimenti associati ai singoli punti di uno spazio a connessione proiettiva una tale scelta, che il passaggio da un riferimento a un altro infinitamente vicino *si faccia con una omografia del gruppo di olonomia.* Questo teorema serve di base per trattare il problema *di costruire uno spazio a connessione proiettiva che abbia un gruppo di olonomia prefissato.* In particolare l'A. ritrova, a partire da certi gruppi di olonomia che hanno invariante un *piano* o una *quadrica,* quali casi particolari delle connessioni proiettive le connessioni *affini,* le connessioni *di Weyl* e *riemanniane,* e anche una sorta di connessione *non-euclidea* (1). Infine l'A. tratta a fondo un problema particolare: la determinazione dei gruppi di olonomia delle connessioni proiettive normali *a due dimensioni.*

Un *Indice Bibliografico,* limitato alle opere più significative, conclude l'interessante volume.

ENEA BORTOLOTTI

(1) Ved. pp. 293-294; cfr. BORTOLOTTI-HLAVATY, loc. cit., e i lavori di VEBLEN, di SCHOUTEN, VAN DANTZIG e miei ivi menzionati.