
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CONTE

A proposito d'una equazione a matrice circolante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **16** (1937), n.5, p. 226–227.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_226_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_226_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_226_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

A proposito d'una equazione a matrice circolante.

Nota di LUIGI CONTE (a Torino).

Sunto. - *L'A. perviene in maniera più semplice ad un risultato relativo ad una equazione a matrice circolante studiata da L. TOSCANO.*

1. Il dott. TOSCANO, in una Nota pubblicata in questo « Bollettino » (n.º 5, 1935), ha dimostrato che l'equazione a matrice circolante ⁽¹⁾

$$(1) \quad C(k) = \begin{vmatrix} a_m - \alpha^m k & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_m - \alpha^{m-1} k & a_1 & \dots & a_{m-3} & a_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_m - \alpha^2 k & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & a_m - \alpha k \end{vmatrix} = 0,$$

ove α è radice m -ma primitiva dell'unità, si riduce all'equazione binomia

$$(2) \quad k^m = \varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_m),$$

essendo le α_i le radici m -esime dell'unità e

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_m x^{m-1}.$$

Il TOSCANO arriva a questo risultato facendo vedere che se si sviluppa la (1) secondo le potenze decrescenti di $-k$, i coefficienti dei singoli termini, ad eccezione del primo e dell'ultimo sono nulli.

Allo stesso risultato si può pervenire con le seguenti semplici considerazioni.

2. Si osservi che se nel primo membro della (1) si sostituisce a k , $\alpha^i \cdot k$ ($i=1, 2, 3, \dots, m-1$), il determinante, a meno di permutazioni di righe e di colonne, rimane immutato; e siccome dette permutazioni lasciano invariato il valore assoluto del determinante, segue che, se k è una radice della (1), le altre $m-1$ radici sono

$$\alpha k, \quad \alpha^2 k, \dots, \quad \alpha^{m-1} k,$$

cioè che la (1) è della forma

$$(-k)^m + C(0) = 0,$$

(¹) Quest'equazione s'è presentata al TOSCANO in alcune ricerche sugli *Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare*. « Rend. Acc. Lincei », giugno-luglio 1935.

ossia

$$k^m = (-1)^{m+1} |a_m, a_1, a_2 \dots a_{m-1}| = (-1)^{m+1} \cdot (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} |a_1, a_2 \dots a_m|.$$

E poichè ⁽¹⁾ quest'ultimo circolante è dato da

$$(-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \varphi(x_1) \varphi(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi(x_m)$$

ne segue la (2).

3. Si noti pure che, detto A_i il complemento algebrico di a_i ,

$$C(0) = \Sigma a_i \cdot \Sigma A_i;$$

perciò: Se $\Sigma a_i = 0$ la (1) ammette come sola radice lo zero.

⁽¹⁾ E. PASCAL, *I determinanti*. (Hoepli, 1923), pagg. 113-114.