Luigi Conte

A proposito d'una equazione a matrice circolante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.5, p. 226–227.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_226_0>

A proposito d'una equazione a matrice circolante.

Nota di LUIGI CONTE (a Torino).

Sunto. - *L'A. perviene in maniera più semplice ad un risultato relativo ad una equazione a matrice circolante studiata da* L. TOSCANO.

1. Il dott. TOSCANO, in una Nota pubblicata in questo « Bollettino » (n.° 5, 1935), ha dimostrato che l'equazione a matrice circolante (1)

$$(1)\qquad C(k)=\begin{vmatrix} a_m-\alpha^m k & a_1 & a_2 \dots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_m-\alpha^{m-1}k & a_1 \dots & a_{m-3} & a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots & a_m-\alpha^2 k & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_{m-1} & a_m-\alpha k \end{vmatrix}=0,$$

ove α è radice m-ma primitiva dell'unità, si riduce all'equazione binomia

$$(2)\qquad k^m=\varphi(\alpha_1)\cdot\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_m),$$

essendo le α_i le radici m-esime dell'unità e

$$\varphi(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\dots+a_mx^{m-1}.$$

Il TOSCANO arriva a questo risultato facendo vedere che se si sviluppa la (1) secondo le potenze decrescenti di $-k$, i coefficienti dei singoli termini, ad eccezione del primo e dell'ultimo sono nulli.

Allo stesso risultato si può pervenire con le seguenti semplici considerazioni.

2. Si osservi che se nel primo membro della (1) si sostituisce a k, $\alpha^i\cdot k$ $(i=1, 2, 3, \dots m-1)$, il determinante, a meno di permutazioni di righe e di colonne, rimane immutato; e siccome dette permutazioni lasciano invariato il valore assoluto del determinante, segue che, se k è una radice della (1), le altre $m-1$ radici sono

$$\alpha k,\quad \alpha^2 k,\dots,\quad \alpha^{m-1}k,$$

cioè che la (1) è della forma

$$(-k)^m+C(0)=0,$$

(1) Quest'equazione s'è presentata al TOSCANO in alcune ricerche sugli *Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare.* « Rend. Acc. Lincei », giugno-luglio 1935.

ossia

$$k^m = (-1)^{m+1} \, | a_m, a_1, a_2 \dots a_{m-1} | = (-1)^{m+1} \cdot (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} | a_1, a_2 \dots a_m | .$$

E poichè [1] quest'ultimo circolante è dato da

$$(-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) \cdot \dots \cdot \varphi(\alpha_m)$$

ne segue la (2).

3. Si noti pure che, detto A_i il complemento algebrico di a_i,

$$C(0) = \Sigma a_i \cdot \Sigma A_i ;$$

perciò: *Se* $\Sigma a_i = 0$ *la* (1) *ammette come sola radice lo zero.*

[1] E. PASCAL, *I determinanti.* (Hoepli, 1923). pagg. 113-114.