BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

Ernesto Pizzetti

Sulla distribuzione delle tensioni interne in un solido cilindrico sollecitato a torsione semplice

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.5, p. 218–225.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_218_0>

Sulla distribuzione delle tensioni interne in un solido cilindrico sollecitato a torsione semplice.

Nota di ERNESTO PIZZETTI (a Torino).

Sunto. - *Si dimostra che la distribuzione delle tensioni interne nel caso della tensione semplice soddisfa alle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio richieste dal Teorema di* MENABREA. *Si applica poi tale risultato alla teoria delle deformazioni elasto-plastiche del materiale.*

1. Come è ben noto, per la determinazione dello stato di equilibrio elastico di un solido soggetto a forze esterne ed a vincoli assegnati si può procedere in due maniere diverse: ed applicando il principio dei lavori virtuali oppure usufruendo del teorema di MENABREA. Poichè la soluzione del problema dell'equilibrio elastico è unica, si giungerà evidentemente con questi due metodi allo stesso risultato.

In particolare nella teoria classica di DE SAINT-VENANT, per risolvere il problema dell'equilibrio elastico, si procede in modo indiretto, assegnando *a priori* la distribuzione di tensioni interne in ogni singolo caso e verificando poi che tale distribuzione soddisfa alle equazioni indefinite dell'equilibrio ed a quelle ai limiti, che sono appunto le condizioni per l'equilibrio volute dal principio dei lavori virtuali. Sarà però la medesima cosa verificare che il sistema dato di tensioni interne soddisfa alle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio richieste dal teorema di MENABREA ed è proprio questo quello che io mi propongo di far vedere nel caso particolare di una sollecitazione esterna del tipo della torsione semplice.

Tale risultato mi servirà poi per fare un'applicazione della recentissima teoria del prof. COLONNETTI (¹) sull'equilibrio dei sistemi, nei quali si presentano anche deformazioni permanenti, al caso della torsione semplice.

2. Supposte verificate le condizioni di DE SAINT-VENANT, siano σ_z, τ_{yz}, τ_{zx} le tensioni interne che si presentano nel solido cilindrico che si considera. Supponiamo che la distribuzione di tali tensioni sia quella che si ha nel caso della torsione semplice, cioè la:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma_z = 0, \\ \tau_{yz} = - Gc\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - x\right), \\ \tau_{zx} = - Gc\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + y\right), \end{cases}$$

ove G è il modulo di elasticità tangenziale del materiale e c e ψ sono rispettivamente una costante ed una funzione di x ed y, che determineremo in seguito.

Vogliamo ora verificare, secondo il teorema di MENABREA, che tale distribuzione di tensioni rende minima la funzione

$$(2) \qquad \Phi = \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) dV,$$

(ove con V abbiamo indicato lo spazio occupato dal solido e con φ l'energia potenziale elastica elementare) rispetto a tutti i valori che la funzione stessa può assumere compatibilmente colle forze esterne date.

Ricordiamo (²) perciò che l'energia potenziale elastica elemen-

(¹) G. COLONNETTI, *Su l'equilibrio dei sistemi nei quali si verificano anche deformazioni non elastiche.* « Rend. Acc. Lincei », 1937, vol. XXV, serie 6ª.

(²) V. per es. G. COLONNETTI, *La statica delle Costruzioni.* U. T. E. T., Torino, Parte seconda, Cap. II.

tare nel caso di De Saint-Venant si può porre sotto la forma:

$$\varphi = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G},$$

e riferiamoci ad un tronco di cilindro compreso fra due sezioni rette distanti fra loro dz, indicando con A l'area di una sezione retta: allora l'espressione (2) assume la forma:

$$d\Phi = \frac{dz}{2E}\int_A \sigma_z^2 dA + \frac{dz}{2G}\int_A (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) dA. \tag{2'}$$

A causa della condizione di minimo, a cui deve soddisfare l'espressione (2') occorre che sia verificata l'equazione:

$$\frac{1}{E}\int_A \sigma_z \delta\sigma_z dA + \frac{1}{G}\int_A (\tau_{yz}\delta\tau_{yz} + \tau_{zx}\delta\tau_{zx}) dA = 0, \tag{3}$$

compatibilmente colle forze esterne e cioè compatibilmente alle sei equazioni:

$$\int_A \delta\sigma_z \cdot dA = 0, \quad \int_A \delta\sigma_z \cdot y dA = 0, \quad \int_A \delta\sigma_z \cdot x dA = 0,$$

$$\int_A (\delta\tau_{yz} x - \delta\tau_{zx} y) dA = 0, \quad \int_A \delta\tau_{yz} dA = 0, \quad \int_A \delta\tau_{zx} dA = 0,$$

che si chiamano appunto *equazioni di compatibilità* colle forze esterne.

Infine sulla superficie laterale del cilindro deve notoriamente essere soddisfatta l'equazione

$$\tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = 0, \tag{4}$$

ove n indica la normale al contorno della sezione che si considera.

Data la distribuzione di tensioni interne (1), si vede subito che essa verifica identicamente tutte le equazioni di compatibilità ad eccezione della

$$\int_A (x\delta\tau_{yz} - y\delta\tau_{zx}) dA, \tag{5}$$

che resta quindi l'unica equazione di compatibilità colle forze esterne.

Verifichiamo ora che le (1) soddisfano all'equazione al contorno della sezione (4): sostituendo in essa le espressioni delle tensioni dateci dalle (1), abbiamo

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - x\right) \cos(n, y) = 0,$$

ed anche, poichè $\frac{dx}{dn} = \cos(n, x)$ e $\frac{dy}{dn} = \cos(n, y)$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn} = x\frac{dy}{dn} - y\frac{dx}{dn},$$

e quindi

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{xdy - ydx}{dn}.$$

Indicando poi con $f(x, y) = 0$ l'equazione del contorno della sezione A, si ha la formula finale

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \tag{6}$$

e quindi, affinchè la (4) sia verificata, occorre determinare una funzione $\psi(x, y)$ tale che la sua derivata normale assuma al contorno i valori dati dalla (6): resta così determinata una prima condizione alla quale deve soddisfare la funzione ψ, finora incognita.

Ritorniamo ora all'equazione di equilibrio (3), la quale, giusta le (1), si può scrivere

$$\int_A \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - x\right)\delta\tau_{yz}dA + \int_A \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\right)\delta\tau_{zx}dA = 0, \tag{3'}$$

od anche

$$\int_A \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\tau_{zx} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta\tau_{yz}\right)dA - \int_A (x\delta\tau_{yz} - y\delta\tau_{zx})dA = 0;$$

il secondo integrale è nullo a causa dell'equazione di compatibilità (5) e ci resta quindi solo più da dimostrare che è nullo

$$\int_A \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\tau_{zx} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta\tau_{yz}\right)dA. \tag{7}$$

Perciò osserviamo che dalle (1) otteniamo

$$\left\{\begin{aligned} \delta\tau_{yz} &= -Gc\left[\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \delta x\right], \\ \delta\tau_{zx} &= -Gc\left[\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \delta y\right]. \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

e quindi

$$(8)\qquad \int_A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta\tau_{zx}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta\tau_{yz}\right)dA=$$

$$=-Gc\int_A\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta y-\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta x\right]dA=$$

$$=-Gc\int_A\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]dA+Gc\int_A\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta x-\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta y\right)dA.$$

Consideriamo per ora solo il primo integrale dell'ultimo membro ed indichiamolo, per brevità, con (I): invertendo in esso i segni δ e ∂ ed applicando la formula di Green, si ha:

$$(I)=-Gc\int_A\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\psi)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\psi)\right]dA=Gc\int_s\psi\,\frac{d(\delta\psi)}{dn}\,ds+Gc\int_A\psi\Delta_2(\delta\psi)dA.$$

Se introduciamo l'ipotesi che ψ sia una funzione armonica (da cui discende immediatamente che anche $\delta\psi$ è armonica [3])) abbiamo che

$$(I)=Gc\int_s\psi\,\frac{d}{dn}\,(\delta\psi)ds=Gc\int_s\psi\left[\delta x\,\frac{dy}{dn}-\delta y\,\frac{dx}{dn}\right]ds=$$

$$=Gc\left[\int_s\psi\delta x\,\frac{dy}{dn}\,ds-\int_s\psi dy\,\frac{dx}{dn}\,ds\right]\ {}^{(4)},$$

ed applicando la formula di Gauss:

$$(I)=-Gc\int_A\frac{\partial(\psi\delta x)}{\partial y}\,dA+Gc\int_A\frac{\partial(\psi\delta y)}{\partial x}\,dA=-Gc\int_A\left[\delta x\,\frac{\partial\psi}{\partial y}-\delta y\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dA.$$

Sostituendo infine il valore trovato per (I) nella (8) si ha:

$$\int_A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta\tau_{zx}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta\tau_{yz}\right)dA=-Gc\int_A\left[\delta x\,\frac{\partial\psi}{\partial y}-\delta y\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dA+$$

$$+Gc\int_A\left[\delta x\,\frac{\partial\psi}{\partial y}-\delta y\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dA.$$

(3) Basta infatti calcolare il $\Delta_2(\delta\psi)$ tenendo presente che ψ è una funzione armonica.

(4) Nel passaggio dal secondo al terzo membro di questa relazione, usufruiamo della seguente formula

$$\frac{d(\delta\psi)}{dn}=\delta x\,\frac{dy}{dn}-\delta y\,\frac{dx}{dn},$$

la quale si deduce facilmente dalla (4) come sopra si è dedotta la formula analoga

$$\frac{d\psi}{dn}=\frac{xdy-ydx}{dn}.$$

Resta così dimostrato che (7) è nullo e che quindi è verificata dalle (1) l'equazione di equilibrio (3).

La distribuzione di tensioni interne (1), quando si prenda per ψ una funzione armonica, la cui derivata normale assuma al contorno i valori dati dalla (6) soddisfa dunque a tutte le condizioni del teorema di MENABREA per l'equilibrio.

3. Supponiamo ora, riferendoci sempre al caso del solido cilindrico della teoria di DE SAINT-VENANT, che in qualche punto almeno della sezione i limiti di elasticità del materiale siano stati superati dimodochè oltre alle deformazioni elastiche $\varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ si presentino anche delle deformazioni permanenti $\overline{\varepsilon}_z, \overline{\gamma_{yz}}, \overline{\gamma_{zx}}$ che consideriamo come funzioni date del punto della sezione. Le tensioni interne che si presentamo nel materiale sono legate alle deformazioni elastiche dalle note formule:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx},$$

poniamo allora per analogia colla teoria delle deformazioni elastiche e per brevità

$$\overline{\sigma}_z = E\overline{\varepsilon}_z, \quad \overline{\tau_{yz}} = G\overline{\gamma_{yz}}, \quad \overline{\tau_{zx}} = G\overline{\gamma_{zx}}:$$

con ciò non vogliamo però attribuire a tali nuove espressioni alcun significato fisico, ma bensì un significato puramente formale.

La distribuzione delle tensioni interne e delle $\overline{\sigma}_z, \overline{\tau_{yz}}, \overline{\tau_{zx}}$ sia del tipo della distribuzione di tensioni (1) sopra considerata e cioè:

$$(9) \qquad \begin{cases} \sigma_z + \overline{\sigma}_z = 0, \\ \tau_{yz} + \overline{\tau_{yz}} = -Gc\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - x\right), \\ \tau_{zx} + \overline{\tau_{zx}} = -Gc\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + y\right), \end{cases}$$

e verifichiamo se tale distribuzione soddisfa alle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio elastico del solido e quale tipo di sollecitazione caratterizza. Il teorema del prof. COLONNETTI, che è l'analogo del teorema di MENABREA per il campo delle deformazioni elasto-plastiche ([5]), ci dice che per l'equilibrio deve essere

([5]) Ved. G. COLONNETTI, loc. cit. in ([1]). Il teorema dice precisamente: Le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio considerato sono quelle che rendono minima l'espressione

$$\Phi + \int_V (\overline{\varepsilon_x}\sigma_x + \overline{\varepsilon_y}\sigma_y + \overline{\varepsilon_z}\sigma_z + \overline{\gamma_{yz}}\tau_{yz} + \overline{\gamma_{zx}}\tau_{zx} + \overline{\gamma_{xy}}\tau_{xy})dV),$$

per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compaminima l'espressione

$$\Phi + \int_V (\overline{\varepsilon_z}\sigma_z + \overline{\gamma_{yz}}\tau_{yz} + \overline{\gamma_{zx}}\tau_{zx})dV,$$

per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compatibilmente colla deformazione impressa e colle forze esterne date. Come si è già fatto nel caso delle deformazioni puramente elastiche, troviamo che compatibilmente alle sei equazioni delle forze esterne, deve essere soddisfatta l'equazione di equilibrio

$$(10) \qquad \frac{1}{E}\int_A (\sigma_z + \overline{\sigma_z})\delta\sigma_z dA + \frac{1}{G}\int_A (\tau_{yz} + \overline{\tau_{yz}})\delta\tau_{yz} dA + \frac{1}{G}\int_A (\tau_{zx} + \overline{\tau_{zx}})\delta\tau_{zx} dA = 0.$$

Per la distribuzione considerata (9), resta al solito come sola equazione di compatibilità la (5), e la (10) assume la forma

$$(10') \qquad \int_A \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - x\right)\delta\tau_{yz} dA + \int_A \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\right)\delta\tau_{zx} dA = 0.$$

Lo stesso calcolo fatto sopra per il caso delle deformazioni elastiche ci dimostra che la (10') è completamente verificata dalle (9), quando si tenga presente che possiamo considerare le $\overline{\gamma_{yz}}$ e $\overline{\gamma_{zx}}$ come delle costanti in quanto ricerchiamo le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio compatibilmente colla deformazione impressa.

Le tensioni interne dovranno poi soddisfare anche l'equazione al contorno della sezione (4).

Sostituendo i valori di τ_{yz} e τ_{zx} dateci dalle (9) e procedendo in modo analogo a quello che si è fatto precedentemente, otteniamo che la funzione ψ (che per soddisfare (10') deve essere armonica) deve verificare al contorno la relazione

$$(11) \qquad \frac{d\psi}{dn} = \frac{\left(x - \frac{\overline{\tau_{yz}}}{Gc}\right)dy - \left(y + \frac{\overline{\tau_{zx}}}{Gc}\right)dx}{dn}.$$

Risulta quindi che per la determinazione della funzione ψ bisogna risolvere il problema di NEUMANN relativo alla sezione considerata ed alla distribuzione di valori al contorno (11). Però, affinchè tale problema abbia soluzione, occorre che si verifichi al contorno la nota proprietà delle funzioni armoniche

$$\int_s \frac{d\psi}{dn} ds = 0,$$

tibilmente colla deformazione impressa e colle forze esterne date. Poichè nel nostro caso siamo nelle ipotesi di DE SAINT-VENANT l'espressione si riduce a quella scritta.

ciò che porta come conseguenza che le $\overline{\tau_{yz}}$ e $\overline{\tau_{zx}}$ devono soddisfare alla relazione

$$\int_s \left(\overline{\tau_{yz}}\frac{dy}{dn} + \overline{\tau_{zx}}\frac{dx}{dn}\right)ds = 0.$$

In particolare le $\overline{\tau_{yz}}$ e $\overline{\tau_{zx}}$ verificheranno certamente tale condizione se si suppone che

$$\overline{\tau_{yz}}\frac{dy}{dn} + \overline{\tau_{zx}}\frac{dx}{dn} = 0,$$

cioè se si suppone che le deformazioni permanenti verifichino la medesima equazione al contorno della sezione che deve essere soddisfatta dalle deformazioni elastiche: tale ipotesi è poi pienamente giustificata dal fatto che le deformazioni plastiche sono determinate dalla stessa sollecitazione esterna che determina le deformazioni elastiche [6].

Visto in tal modo che le (9) soddisfano a tutte le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio, calcoliamo il valore del momento torcente (unica sollecitazione esterna che non sia nulla)

$$Q = \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{zx}y)dA = -Gc\int_A\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}x - \frac{\partial\psi}{\partial x}y\right)dA + GcJ_0 - G\int_A(\overline{\gamma_{yz}}x - \overline{\gamma_{zx}}y)dA$$

ove J_0 è il momento d'inerzia polare della sezione rispetto al suo baricentro. Ponendo:

$$q = \frac{J_0}{J_0 - \int_A\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}x - \frac{\partial\psi}{\partial x}y\right)dA},$$

si ha

$$Q = Gc\frac{J_0}{q} - G\int_A(\overline{\gamma_{yz}}x - \overline{\gamma_{zx}}y)dA,$$

da cui si ricava il valore della costante c (finora indeterminata)

$$c = q\,\frac{Q + G\int_A(\overline{\gamma_{yz}}x - \overline{\gamma_{zx}}y)dA}{GJ_0},$$

che differisce dal valore assegnato dalla Teoria dell'Elasticità per $\int_A(\overline{\gamma_{yz}}x - \overline{\gamma_{zx}}y)dA$ [7].

Sostituendo poi il valore di c nelle (9) resta allora pienamente determinata la distribuzione delle tensioni interne e delle $\overline{\sigma_z}$, $\overline{\tau_{yz}}$, $\overline{\tau_{zx}}$.

[6] Ved. G. Colonnetti, *Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico.* « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze », 1937.

[7] Ved. G. Colonnetti, loc. cit. in [6].