Mauro Picone

I polinomi di Hermite e di Laguerre come autosoluzioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **16** (1937), n.5, p. 205–218.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_5_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1937.

PICCOLE NOTE

I polinomi di Hermite e di Laguerre come autosoluzioni (*).

Nota di MAURO PICONE (a Roma).

Sunto. - *Per due ben note equazioni differenziali ordinarie, lineari, omogenee, del second'ordine, contenenti linearmente un parametro, si stabilisce che certi comportamenti — che si reputano non ancora stati considerati — negli intorni dei punti singolari per esse, prescritti alle soluzioni, caratterizzano, con determinati spettri per il parametro, i polinomi, rispettivamente, di* HERMITE *e di* LAGUERRE, *come autosoluzioni.*

Per il polinomio di HERMITE di grado n:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

sussiste l'eguaglianza

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0,$$

e nel preziosissimo libro di COURANT e HILBERT [1], a pag. 283. trovasi dimostrato che se si ricercano valori *reali* del parametro λ nell'equazione differenziale del second'ordine:

(1) $$H'' - 2xH' + \lambda H = 0,$$

per ciascuno dei quali esiste una soluzione, non identicamente nulla, di tale equazione che, per $|x| \to \infty$, verifichi definitivamente una limitazione del tipo

(2) $$|H(x)| < M|x|^\alpha,$$

con M e α costanti positive, si trova che essi sono tutti e soli i numeri interi pari non negativi $2n$ e che, per ognuno di essi, le

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Phisik I.* [Zweite Auflage, Springer, Berlin (1931)].

soluzioni della (1) godenti di detta proprietà sono tutte date dal polinomio $H_n(x)$ moltiplicato per una costante arbitraria. Il polinomio $H_n(x)$ può perciò considerarsi come autosoluzione dell'equazione differenziale (1) con la condizione (2) alla frontiera del campo d'esistenza delle soluzioni della (1), che è l'intero asse reale.

Presentatamisi in una recente ricerca la necessità di caratterizzare le autosoluzioni della (1), anche per valori di λ non necessariamente reali, dotate di una crescenza all'infinito più forte di quella consentita dalla limitazione (2), sono pervenuto al seguente teorema che, reputandolo nuovo, mi sembra utile pubblicare.

TEOREMA H. — *Tutti e soli i valori di* λ *(reali o complessi) nell'equazione* (1) *per ciascuno dei quali esiste una soluzione* H(x) — *diversa dallo zero* — *della* (1) *stessa, che, per* $|x| \to \infty$, *verifichi definitivamente una limitazione del tipo*

$$|H(x)| < Me^{x^2/2}|x|^{\alpha}, \tag{3}$$

con M *e* α *costanti positive, sono i numeri interi pari non negativi* 2n *e per ognuno di questi le soluzioni della* (1) *godenti di detta proprietà sono tutte date dal polinomio* $H_n(x)$ *di* HERMITE *moltiplicato per una costante arbitraria.*

Scopo della Nota presente è di esporre la dimostrazione di questo teorema e di indicare rapidamente quella analoga del seguente:

TEOREMA L. — *Tutti e soli i valori di* λ *(reali o complessi) nell'equazione differenziale*

$$xL'' + (1-x)L' + \lambda L = 0, \qquad (x > 0), \tag{4}$$

considerata nel semiasse reale positivo (aperto), per ciascuno dei quali esiste una soluzione L(x) — *diversa dallo zero* — *dell'equazione, che, per* $x \to \infty$, *verifichi definitivamente una limitazione del tipo*

$$|L(x)| < Me^{x/2}x^{\alpha}, \tag{5}$$

con M *e* α *costanti positive e, per* $x \to 0$, *la relazione di limite*

$$\lim_{x \to 0} (xL'(x)) = 0, \tag{6}$$

sono i numeri interi non negativi n, *e per ognuno di questi le soluzioni della* (4) *godenti di dette proprietà sono tutte date dal polinomio di* LAGUERRE

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

moltiplicato per una costante arbitraria.

1. Un problema al contorno sull'asse reale e la relativa funzione di Green. — Con la sostituzione

$$\psi = He^{-x^2}, \tag{7}$$

la (1) si cangia nella seguente

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d\psi}{dx}\right) + (\lambda + 2)e^{x^2}\psi = 0, \tag{8}$$

e porremo

$$p_n = \sqrt{2^n \cdot n!\sqrt{\pi}}, \quad \psi_n(x) = \frac{H_n(x)}{p_n}e^{-x^2},$$

$$\varphi_n(x) = \frac{H_n(x)}{p_n}e^{-x^2/2} = \psi_n(x)e^{x^2/2}.$$

Il sistema $[\varphi_n(x)]$ $(n = 0, 1, \ldots)$, delle *funzioni di* Hermite, è ortogonale e normale sull'asse reale e, notoriamente, ivi completo per l'approssimazione lineare, in media, delle funzioni (reali o complesse) di norma sommabile sul detto asse.

Per le funzioni $\psi_n(x)$ sussistono le eguaglianze

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d\psi_n}{dx}\right) + 2(n+1)e^{x^2}\psi_n = 0, \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{8_n}$$

e sono verificate le condizioni all'infinito

$$\lim_{|x|\to\infty}\psi(x) = \lim_{|x|\to\infty}\frac{\psi'(x)}{x} = 0, \tag{9}$$

ed è immediato che la funzione di Green, relativa a queste condizioni, per l'espressione differenziale

$$E[\psi] = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d\psi}{dx}\right),$$

che compare al primo membro delle (8) e (8_n) riesce così definita:

$$G(x, \xi) = \frac{u(x)v(\xi)}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{per} \quad x \leqq \xi,$$

$$= \frac{u(\xi)v(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{per} \quad x \geqq \xi,$$

con

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2}ds, \quad v(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{-s^2}ds.$$

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} v(x) = \sqrt{\pi}, \quad u(x) + v(x) = \sqrt{\pi},$$

(10′) $$u(x) < \frac{1}{2|x|e^{x^2}}, \quad \text{per} \quad x < 0,$$

(10″) $$v(x) < \frac{1}{2xe^{x^2}}, \quad \text{per} \quad x > 0.$$

Sia $f(x)$ un' assegnata funzione continua (reale o complessa) e consideriamo il problema, al contorno sull' asse reale, della determinazione di una soluzione $\psi(x)$ dell' equazione differenziale

(11) $$E[\psi] + f(x) \equiv \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d\psi}{dx}\right) + f(x) = 0,$$

verificante le condizioni (9). Se a, b e ξ sono tre numeri reali, ed è $a < \xi < b$, dalla (11) si trae

$$\psi(\xi) = \frac{u(\xi)}{\sqrt{\pi}} e^{b^2}[v(b)\psi'(b) - \psi(b)v'(b)] - \frac{v(\xi)}{\sqrt{\pi}} e^{a^2}[u(a)\psi'(a) - \psi(a)u'(a)] +$$
$$+ \int_a^b G(x, \xi)f(x)dx.$$

Ora, in virtù delle (10), si ha, per $b > 0$,

$$e^{b^2}|v(b)\psi'(b) - \psi(b)v'(b)| < \left|\frac{\psi'(b)}{2b}\right| + |\psi(b)|,$$

e, per $a < 0$,

$$e^{a^2}|u(a)\psi'(a) - \psi(a)u'(a)| < \left|\frac{\psi'(a)}{2a}\right| + |\psi(a)|,$$

e pertanto il teorema:

I. *Se la* (11) *possiede una soluzione* $\psi(x)$ *verificante le condizioni* (9), *l' integrale improprio*

(12) $$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi)f(\xi)d\xi,$$

deve, per ogni x *reale, risultare convergente, e si ha*

(13) $$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi)f(\xi)d\xi.$$

Non può dunque esistere più di una soluzione della (11) *verificante le condizioni* (9).

Assumiamo ora, comunque, una funzione continua $f(x)$, tale che il rapporto

$$(14) \qquad \rho(x) = \frac{|f(x)|}{(1+|x|)e^{x^2}},$$

riesca sommabile sull'asse reale. Ogni soluzione $\psi(x)$ della (11) verifica allora la seconda delle condizioni (9), si ha cioè sempre $\lim(\psi'/x)$ (per $|x| \to \infty) = 0$. Assegnato invero, arbitrariamente, un numero positivo ε, ne esiste un altro $c(\varepsilon)$, tale da risultare $\int_c^\infty \rho(x)dx < \varepsilon$, e dalla (11), per $x > c(\varepsilon)$, si trae

$$|e^{x^2}\psi'(x)| < |e^{c^2}\psi'(c)| + \int_c^x \rho(\xi)(1+\xi)e^{\xi^2}d\xi,$$

$$\frac{|\psi'(x)|}{x} < \frac{|e^{c^2}\psi'(c)|}{xe^{x^2}} + \frac{1+x}{x}\int_c^x \rho(\xi)d\xi,$$

donde $\lim''|\psi'/x|$ (per $x \to +\infty) \leq \varepsilon$ [2]. D'altra parte l'integrale

$$(13) \qquad \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi)f(\xi)d\xi = \frac{v(x)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} u(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{u(x)}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} v(\xi)f(\xi)d\xi,$$

riesce allora sempre, per ogni x reale, certo convergente, anzi addirittura ad integrando sommabile sull'asse reale e se prendiamo un $c(\varepsilon)$ positivo talmente grande che, essendo $\int_c^\infty \rho(x)dx < \varepsilon$, risulti anche, per $x \geq c(\varepsilon)$, $(1+x)/x < 2$, segue dalla (13), in virtù della (10''),

$$|\psi(x)| < \frac{1}{2xe^{x^2}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{c} u(\xi)|f(\xi)|d\xi + 2\varepsilon,$$

e quindi $\lim''|\psi(x)|$ (per $x \to +\infty) \leq 2\varepsilon$. Si ha dunque:

II. *Comunque si assuma una funzione continua* f(x), *per la quale il rapporto* (14) *riesce sommabile sull'asse reale, esiste sempre una ed una sola soluzione della* (11), *fornita dalla* (13), *infinitesima per* $|x| \to \infty$.

[2] Secondo le notazioni delle mie *Lezioni di Analisi infinitesimale* [« Circolo Matematico di Catania », Catania (1923)], con lim' e lim'' indico rispettivamente, il minimo ed il massimo limite.

Se ora si riflette che $e^{x^2}\psi_n = H_n/p_n$, verifica le ipotesi testè contemplate per la $f(x)$ e la ψ_n, infinitesima per $|x| \to \infty$, l'equazione differenziale (8_n), si ha che:

III. *Per la funzione* $\psi_n(x)$ *sussiste l'equazione integrale*

$$\psi_n(x) = 2(n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi)e^{\xi^2}\psi_n(\xi)d\xi,$$

e quindi, per la funzione di Hermite $\varphi_n(x)$, *la seguente* (*di* R. NEUMANN)

$$\varphi_n(x) = 2(n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, \xi)\varphi_n(\xi)d\xi \quad (^3),$$

con

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{U(x)V(\xi)}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{per } x \leqq \xi,$$
$$= \frac{U(\xi)V(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{per } x \geqq \xi,$$

$$U(x) = e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-s^2}ds, \quad V(x) = e^{x^2/2}\int_{x}^{+\infty} e^{-s^2}ds.$$

Si ha

$$0 < U(x) < \sqrt{\pi}e^{x^2/2}; \quad 0 < V(x) < \sqrt{\pi}e^{x^2/2}, \quad U(x) + V(x) = \sqrt{\pi}e^{x^2/2},$$

$$U(x) < \frac{1}{2|x|e^{x^2/2}}, \quad \text{per } x < 0, \tag{10'}$$

$$V(x) < \frac{1}{2xe^{x^2/2}}, \quad \text{per } x > 0. \tag{10''}$$

Il nucleo $\Gamma(x, \xi)$, reale e simmetrico, del quale dunque i numeri $2(n+1)$ $(n = 0, 1, ...)$ sono autovalori, con le corrispondenti autosoluzioni normali, $\varphi_n(x)$, verifica, nel piano intero (x, ξ), tutte le ipotesi dei nuclei per i quali è valida la teoria HILBERT–SCHMIDT delle equazioni integrali lineari di seconda specie, aventi per campo d'integrazione l'intero asse reale. Con tutte le necessarie proprietà qualitative si ha, invero, per ogni x reale, definitivamente, per $|\xi| \to \infty$,

$$\Gamma^2(x, \xi) < \frac{e^{x^2}}{4\xi^2 e^{\xi^2}},$$

(3) Cfr. A. KNESER, *Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik.* [« Vieweg und Sohn », Braunschweig (1911)], p. 242.

e, per esempio, per $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^2(x, \xi) d\xi < \frac{1}{4\pi x^2 e^{x^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{\xi^2} u^2(\xi) d\xi + \frac{e^{x^2}}{4} \int_{x}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 e^{\xi^2}},$$

laddove

$$\lim_{x \to \infty} \left[x^3 \left(\frac{1}{4\pi x^2 e^{x^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{\xi^2} u^2(\xi) d\xi + \frac{e^{x^2}}{4} \int_{x}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 e^{\xi^2}} \right) \right] = \frac{1}{4};$$

se ne deduce che, per $|x| \to \infty$, riesce definitivamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^2(x, \xi) d\xi < \frac{1}{3|x|^3}, \tag{15}$$

e sussiste dunque anche la sommabilità, su tutto il piano (x, ξ), del quadrato del nucleo $\Gamma(x, \xi)$ [4].

[4] Le conseguenze che permette subito di trarre, nel caso presente, la consentita applicabilità della teoria classica delle equazioni integrali lineari non sono trascurabili, specialmente per la circostanza che, detto $\Gamma_1(x, \xi)$ il primo nucleo iterato, $\Gamma_1(x, x)$ riesce, in virtù della (15) del testo, *limitato* sull'asse reale. Ne segue, in primo luogo, che nelle eleganti formole sommatorie

$$2^{1+\nu}\Gamma_\nu(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)}{(k+1)^{1+\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

ove $\Gamma_\nu(x, \xi)$ designa il ν^{mo} nucleo iterato, le serie al secondo membro convergono assolutamente ed uniformemente in tutto il piano. Si ha, in particolare,

$$\pi 2^{1+\nu}\Gamma_\nu(0, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2k)} \frac{1}{(2k+1)^{1+\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Sia, in secondo luogo, $y(x)$ una funzione dotata ovunque di derivata prima, assolutamente continua in ogni intervallo finito, tale riuscirà $\eta(x) = y(x)e^{-x^2/2}$, e supposto che $\eta(x)$ verifichi le (9), cioè che

$$\lim_{|x| \to \infty} (ye^{-x^2/2}) = \lim_{|x| \to \infty} \left(\frac{y'}{x} e^{-x^2/2} \right) = 0, \tag{*}$$

si avrà

$$\eta(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi) E[\eta(\xi)] d\xi,$$

e quindi, per essere $e^{-x^2/2}E[\eta] = y'' - (1 + x^2)y$,

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, \xi)[(1 + \xi^2)y(\xi) - y''(\xi)] d\xi, \tag{**}$$

2. **Dimostrazione del teorema H.** — Sia $H(x)$ una soluzione della (1) verificante la (3). Sussiste allora la (8) per la $\psi(x)$ data dalla (7), laddove, poichè per $|x| \to \infty$, è definitivamente

$$|\psi(x)| < Me^{-x^2/2}|x|^\alpha,$$

si avrà $\lim \psi(x)$ (per $|x| \to \infty) = 0$ e la sommabilità sull'asse reale del rapporto

$$\frac{|\psi(x)e^{x^2}|}{(1+|x|)e^{x^2}} = \frac{|\psi(x)|}{1+|x|}.$$

Segue dal teorema II che

$$\psi(x) = (\lambda + 2)\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}\psi(\xi)d\xi, \tag{16}$$

riuscendo l'integrando al secondo membro, per ogni valore reale di x, sommabile sull'asse reale, e pertanto, posto $\lambda + 2 = \mu$, $e^{x^2/2}\psi(x) = \varphi(x)$,

$$\varphi(x) = \mu\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{17}$$

con la stessa proprietà per l'integrando al secondo membro, avendosi, definitivamente per $|x| \to \infty$,

$$|\varphi(x)| < M|x|^\alpha. \tag{18}$$

Per dimostrare, dunque, il teorema H, basterà, in base al teorema III, far vedere che ogni funzione $\varphi(x)$ verificante le (17) e (18)

da qui, di nuovo, segue, con ben note considerazioni, la completezza del sistema delle funzioni di HERMITE $\varphi_n(x)$ e segue anche che, se, con le (*), riesce $y'' - (1 + x^2)y$ di norma sommabile sull'asse reale, la $y(x)$ è sviluppabile in serie di FOURIER nel sistema $[\varphi_n(x)]$, la serie risultando assolutamente ed uniformemente convergente sull'intero asse reale. Nelle indicate ipotesi, poichè le $\varphi_n(x)$ sono tutte infinitesime all'infinito, tale dovrà dunque risultare la $y(x)$, e dalla (**) si ricava effettivamente che $y(x)$ è infinitesima all'infinito, almeno dell'ordine 3/2 rispetto a $1/|x|$, e si ricava altresì che tale è anche $y'(x)$, almeno dell'ordine 1/2. Viceversa, se $y(x)$ è infinitesima all'infinito e $y'' - (1 + x^2)y = e^{-x^2/2}E[\eta]$ è di norma sommabile sull'asse reale, la $\eta(x)$ verifica le (9) del testo e si ha dunque [Cfr. WERA MYLLER-LEBEDEFF, *Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen*, « Math. Ann. », 64 Band, 1907] il teorema: *Ogni funzione* $y(x)$ *infinitesima per* $|x| \to \infty$, *per la quale* $y'(x)$ *è assolutamente continua in ogni intervallo finito e* $y'' - (1 + x^2)y$ *di norma sommabile sull'asse reale, è sviluppabile in serie di* FOURIER *nel sistema* $[\varphi_n(x)]$, *delle funzioni di* HERMITE, *la serie risultando assolutamente ed uniformemente convergente sull'intero asse reale.*

riesce di norma sommabile sull'asse reale; poichè, essendo il sistema $[\varphi_n]$ completo su tale asse, la (17) non può avere ivi altra autosoluzione di norma sommabile che non sia una delle $\varphi_n(x)$ moltiplicata per una costante (5). Ora noi dimostreremo, di più, che

(5) Ai fini della teoria generale delle equazioni integrali è certo istruttivo rilevare l'esempio fornito dalla (17), la quale, *se si toglie alle sue autosoluzioni la condizione della sommabilità della norma sull'asse reale, oltre a quelle del sistema completo* $[\varphi_n]$, *possiede infinite altre autosoluzioni*. È facile infatti verificare che, per $\lambda = 2n$, è autosoluzione della (16) non soltanto la soluzione $\psi_n(x)$ dell'equazione differenziale (8) per $\lambda = 2n$, che dà luogo all'autosoluzione $\varphi_n(x)$ della (16) già considerata, ma lo è anche una *qualsivoglia* soluzione $\psi(x)$ della stessa equazione differenziale. Detto, invero, $(-c_n, c_n)$ un intorno dell'origine che contenga tutti gli zeri del polinomio $H_n(x)$, una soluzione ψ della (8) per $\lambda = 2n$, ha, per $|x| > c_n$, l'espressione

$$(*) \qquad \psi = a(x_0)\psi_n(x) + b(x_0)H_n(x)e^{-x^2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\xi^2}}{H_n^2(\xi)}\,d\xi,$$

ove x_0 è una costante arbitraria $> c_n$ se $x > c_n$ e $< -c_n$ se $x < -c_n$, e $a(x_0)$, $b(x_0)$ sono determinate funzioni di x_0, indipendenti da x. Per potere affermare che ψ è autosoluzione della (16) per $\lambda = 2n$, basterà verificare, in base al teor. II, che essa è infinitesima all'infinito e che $|\psi(x)|/(1 + |x|)$ riesce sommabile sull'asse reale. Ora, effettivamente, se prendiamo c_n talmente grande che l'intorno $(-c_n, c_n)$ contenga anche gli zeri del polinomio

$$2x^2H_n - (n+1)H_n - xH_n',$$

si ha, per $|x| > c_n$,

$$\lim_{|x|\to\infty} (\psi(x)x^{n+1}) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{b(x_0)x^{n+2}}{2x^2H_n - (n+1)H_n - xH_n'} = \frac{b(x_0)}{2^{n-1}},$$

donde la detta verifica e un'ulteriore caratterizzazione dei polinomi di HERMITE espressa dal teorema: *Per ogni soluzione* H(x) *dell'equazione differenziale* (1), *per* $\lambda = 2$n, *esistono, determinati e finiti, entrambi i limiti*

$$\lim_{x\to-\infty} (e^{-x^2}x^{n+1}H(x)), \qquad \lim_{x\to+\infty} (e^{-x^2}x^{n+1}H(x)),$$

e condizione necessaria e sufficiente affinchè la soluzione sia il polinomio di HERMITE *moltiplicato per una costante è che uno di quei limiti sia lo zero.*

Notiamo anche che: *Tutte le soluzioni dell'equazione integrale*

$$\varphi(x) = 2(n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

sommabili in ogni intervallo finito, per le quali l'integrale al secondo membro riesce convergente, per ogni x *reale, sono date da quelle dell'equazione differenziale delle funzioni di Hermite:*

$$\varphi'' + (1 - x^2)\varphi + 2n\varphi = 0.$$

ogni soluzione della (17) verificante la (18), riesce, per $|x| \to \infty$, infinitesima d'ordine comunque elevato rispetto a $1/|x|$. Detto, invero, c un tal numero positivo che, per $x > c$, risulti $|\varphi(x)| < Mx^{\alpha}$, dalla (17) si trae

$$(19) \qquad \frac{|\varphi(x)|}{x^{\alpha-2}} \leq \frac{|\mu|}{2\sqrt{\pi}x^{\alpha-1}e^{x^2/2}}\int_{-\infty}^{c} U(\xi)\,|\varphi(\xi)|\,d\xi + \frac{|\mu|\,M}{2x^{\alpha-1}e^{x^2/2}}\int_{c}^{x} e^{\xi^2/2}\xi^{\alpha}d\xi +$$
$$+ \frac{|\mu|\,Me^{x^2/2}}{2x^{\alpha-2}}\int_{x}^{+\infty}\frac{\xi^{\alpha-1}}{e^{\xi^2/2}}\,d\xi.$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}e^{x^2/2}}\int_{c}^{x} e^{\xi^2/2}\xi^{\alpha}d\xi\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x^2/2}}{x^{\alpha-2}}\int_{x}^{+\infty}\frac{\xi^{\alpha-1}}{e^{\xi^2/2}}\,d\xi\right) = 1,$$

e pertanto, segue dalla (19) che, per $x \to +\infty$, riesce definitivamente

$$|\varphi(x)| < (1 + 2\,|\mu|\,M)x^{\alpha-2},$$

e, dalla ripetuta successiva applicazione di questa considerazione, che, per ogni numero naturale ν, esiste un numero positivo M_ν tale che per $x \to +\infty$ riesce definitivamente

$$|\varphi(x)| < M_\nu x^{\alpha-2\nu},$$

ciò che dimostra quanto si voleva.

3. **Dimostrazione del teorema L.** — Posto $\psi = Le^{-x}$, l'equazione (4) si cangia nella seguente

$$(20) \qquad E[\psi] + (\lambda+1)e^{x}\psi \equiv \frac{d}{dx}\left(xe^{x}\frac{d\psi}{dx}\right) + (\lambda+1)e^{x}\psi = 0,$$

e considereremo il problema al contorno, sul semiasse reale positivo aperto, della determinazione di una soluzione $\psi(x)$ dell'equazione

$$(21) \qquad E[\psi] + f(x) = 0,$$

verificante le condizioni

$$(22) \qquad \lim_{x\to 0}(x\psi'(x)) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\psi(x) = \lim_{x\to\infty}\psi'(x) = 0.$$

Posto

$$G(x, \xi) = v(\xi) = \int_{\xi}^{\infty}\frac{ds}{se^{s}}, \quad \text{per } x \leqq \xi,$$
$$= v(x) \qquad\quad , \quad \text{per } x \geqq \xi,$$

si ha il teorema:

I'. *Se la* (21) *possiede una soluzione* $\psi(x)$ *verificante le condizioni* (22) *l'integrale improprio*

$$\int_0^\infty G(x, \xi)f(\xi)d\xi,$$

deve, per ogni x *positivo, risultare convergente, e si ha*

$$\psi(x) = \int_0^\infty G(x, \xi)f(\xi)d\xi. \tag{23}$$

Assunta un'arbitraria funzione $f(x)$, continua per ogni x positivo, tale che il rapporto

$$\rho(x) \equiv \frac{f(x)}{(1+x)e^x}, \tag{24}$$

riesca sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, si vede subito che tutte le soluzioni della (21) hanno la derivata prima infinitesima all'infinito, e, sfruttando la diseguaglianza $v(x) < 1/xe^x$, che:

II'. *Comunque si assuma una funzione* $f(x)$, *continua per ogni* x *positivo, per la quale il rapporto* (24) *riesce sommabile nell'intervallo* $(0, \infty)$, *esiste sempre una ed una sola soluzione della* (21), *fornita dalla* (23), *verificante le condizioni*

$$\lim_{x\to 0} (x\psi'(x)) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0. \tag{25}$$

In base alle condizioni nel punto *zero* la $\psi(x)$ riesce, per $x\to 0$, definitivamente maggiorata, in modulo, dalla funzione $\varepsilon|\log x|$, con ε quantità positiva arbitraria. Se $f(x)$ è continua nel punto zero si ha, di più, $\lim \psi(x)$ (per $x \to 0$) $= \int_0^\infty v(x)f(x)dx$. Ne segue:

III'. *Per le funzioni* $\varphi_n(x) = e^{-x/2}L_n(x)/(n!)$ *di* LAGUERRE *sussistono le equazioni integrali*

$$\varphi_n(x) = (n+1)\int_0^\infty \Gamma(x, \xi)\varphi_n(\xi)d\xi,$$

con

$$\begin{aligned}\Gamma(x, \xi) &= v(\xi)e^{x/2}e^{\xi/2}, \quad \text{per } x \leq \xi,\\ &= v(x)e^{x/2}e^{\xi/2}, \quad \text{per } x \geq \xi.\end{aligned}$$

Per ogni x positivo è

$$\begin{aligned}\Gamma^2(x, \xi) &= v^2(x)e^x \cdot e^\xi, \quad \text{per } \xi < x,\\ &< e^x \cdot \frac{1}{\xi^2 e^\xi}, \quad \text{per } \xi > x,\end{aligned}$$

e

$$\int_0^\infty \Gamma^2(x, \xi)d\xi = v^2(x)e^x\int_0^x e^{\xi}d\xi + e^x\int_x^\infty v^2(\xi)e^{\xi}d\xi,$$

$$\lim_{x \to 0}\int_0^\infty \Gamma^2(x, \xi)d\xi = \int_0^\infty v^2(\xi)e^{\xi}d\xi,$$

(26) $$\int_0^\infty \Gamma^2(x, \xi)d\xi < \frac{1}{x^2} + e^x\int_x^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 e^{\xi}} < \frac{2}{x^2}.$$

Pertanto il nucleo $\Gamma(x, \xi)$ verifica, nel primo quadrante del piano (x, ξ), tutte le ipotesi della teoria classica delle equazioni integrali aventi per campo d'integrazione il semiasse positivo ([6]).

([6]) Poichè tutti i nuclei iterati $\Gamma_\nu(x, \xi)$ $(\nu \geqq 1)$ riescono continui in tutto il primo quadrante *chiuso* del piano (x, ξ) e inoltre, in base alla (25), $\Gamma_1(x, x)$ limitato, le formole sommatorie

$$\Gamma_\nu(x, \xi) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)}{(k+1)^{1+\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, ...),$$

sono valevoli in ogni punto del detto quadrante, le serie al secondo membro risultando assolutamente ed uniformemente convergenti nello stesso quadrante. Si ha in particolare

$$\Gamma_\nu(0, 0) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)^{1+\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, ...).$$

Sia $y(x)$ una funzione dotata, per ogni x positivo, di derivata prima assolutamente continua in ogni intervallo finito del semiasse positivo aperto. Tale riuscirà $\eta(x) = e^{-x/2}y(x)$ e supposto che questa verifichi le (22), cioè che

(*) $$\lim_{x \to 0}\left(xy' - \frac{xy}{2}\right) = 0, \quad \lim_{x \to \infty}(ye^{-x/2}) = \lim_{x \to \infty}(y'e^{-x/2}) = 0,$$

si avrà

$$\eta(x) = -\int_0^\infty G(x, \xi)E[\eta(\xi)]d\xi,$$

e quindi

(**) $$y(x) = \int_0^\infty \Gamma(x, \xi)\left[\frac{\xi+2}{4}y(\xi) - y'(\xi) - \xi y''(\xi)\right]d\xi.$$

Da qui segue, di nuovo, la completezza del sistema delle funzioni di LAGUERRE $\varphi_n(x)$ e che se, con le (*), riesce $L[y] \equiv xy'' + y' - (x+2)y/4$

Per ogni soluzione $L(x)$ della (4) che verifichi le condizioni (5) e (6), posto $\varphi(x) = L(x)e^{-x/2}$, $\lambda + 1 = \mu$, si trova per $\varphi(x)$ l'equazione integrale

$$\varphi(x) = \mu \int_0^\infty \Gamma(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{27}$$

e le definitive limitazioni, per $x \to \infty$,

$$|\varphi(x)| < Mx^\alpha, \tag{28}$$

e per $x \to 0$

$$|\varphi(x)| < M|\log x|.$$

Dalle (27) e (28) segue subito, col procedimento del n.° 2, che, per $x \to \infty$, si ha definitivamente

$$|\varphi(x)| < (1 + 6|\mu|M)x^{\alpha-1},$$

e quindi, successivamente, per ogni numero naturale ν,

$$|\varphi(x)| < M_\nu x^{\alpha-\nu}.$$

Sussiste dunque la sommabilità della norma di $\varphi(x)$ nell'intervallo $(0, \infty)$ e pertanto essa non può differire, che per un fattore costante, da una delle $\varphi_n(x)$, il cui sistema è completo nell'inter-

di norma sommabile sul semiasse positivo, la $y(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier nel sistema $[\varphi_n]$, la serie risultando assolutamente ed uniformemente convergente in tutto il semiasse positivo *chiuso*. Nelle dette ipotesi, poichè le φ_n sono continue nel punto zero ed infinitesime all'infinito, dovrà, dunque, $y(x)$ avere un limite determinato e finito per $x \to 0$ ed essere infinitesima per $x \to \infty$. Dalla (**) si ricava effettivamente che y e y' sono infinitesime all'infinito, del prim'ordine, almeno, rispetto a $1/x$ e che, per $x \to 0$, y ha un limite determinato e finito e y', se diviene infinita, lo diviene d'ordine non superiore a $1/2$, rispetto a $1/x$. Viceversa, se y è continua per ogni $x \geq 0$, infinitesima per $x \to \infty$, con xy' per $x \to 0$, e $L[y]$ di norma sommabile nell'intervallo $(0, \infty)$, la $\eta(x)$ verifica le (22) del testo e si ha dunque [cfr. W. Myller-Lebedeff, loc. cit. [4]] il teorema: *Una funzione* y *continua per ogni* $x \geq 0$, *infinitesima per* $x \to \infty$, *con* xy' *per* $x \to 0$, *per la quale* y' *è assolutamente continua in ogni intervallo finito del semiasse positivo aperto e* $L[y]$ *di norma sommabile nell'intervallo* $(0, \infty)$, *è sviluppabile in serie di* Fourier *nel sistema* $[\varphi_n]$ *delle funzioni di Laguerre, la serie risultando assolutamente ed uniformemente convergente in tutto il semiasse positivo* ***chiuso***. L'inclusione del punto *zero* conferisce a questo teorema una certa utilità.

vallo $(0, \infty)$ per l'approssimazione lineare, in media, delle funzioni ivi di norma sommabile [7].

[7] Un'ulteriore caratterizzazione dei polinomi di LAGUERRE è fornita dal teorema: *Per ogni soluzione* L(x) *dell'equazione differenziale* (4), *per* $\lambda = n$, *esistono determinati e finiti entrambi i limiti*

$$\lim_{x \to 0} (xL'(x)), \quad \lim_{x \to \infty} (x^{n+1} e^{-x} L(x)),$$

e condizione necessaria e sufficiente affinchè la soluzione sia il polinomio di LAGUERRE, *moltiplicato per una costante, è che uno di quei limiti sia lo zero.*

Ne segue facilmente che: *Tutte le soluzioni dell'equazione integrale*

$$\varphi(x) = -\, lv(x)e^{x/2} + (n+1)\int_0^\infty \Gamma(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

sommabili in ogni intervallo finito del semiasse positivo aperto, per le quali l'integrale al secondo membro riesce convergente, per ogni x *positivo, sono date dalle soluzioni dell'equazione differenziale delle funzioni di* LAGUERRE:

$$(x\varphi')' + (2 - x)\frac{\varphi}{4} + n\varphi = 0,$$

per le quali $\lim (x\varphi')$ (*per* $x \to 0) = l$. *Per* $l = 0$ *sono dunque date dalle funzioni di* LAGUERRE *moltiplicate per una costante arbitraria* [cfr. la nota [5]].