UMI

Recensioni

* G. Castelnuovo: Memorie scelte (Beniamino Segre)
* J. Pérès: Cours de mécanique des fluides
* A. Buhl: Nouveaux Éléments d'Analyse. Calcul Infinitésimal. Géométrie. Physique Théorique (Giovanni Sansone)
* Spaeth, Thirring, Mark, Heisenberg, Menger: Neuere Fortschritte in den exakten Wissenschaften (B. Levi)
* Edgardo Ciani: Scritti geometrici scelti (B. Levi)
* Friedrich Schilling: Pseudosphärische, hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie (Alessandro Terracini)
* Georges Bouligand: Les définitions modernes de la dimension (Alessandro Terracini)
* D. J. Struik: Theory of linear connections (Enea Bortolotti)
* Rothe R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure.
* Reinhardt K.: Methodische Einführung in die höhere Mathematik

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.4, p. 185–199.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_4_185_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1937.

RECENSIONI

G. Castelnuovo: *Memorie scelte.* Bologna, Zanichelli, 1937; pagine X + 588, rileg., L. 125.

Il 25 maggio 1935-XIII colleghi e discepoli del prof. Guido Castelnuovo assistettero con commozione alla lezione di chiusura del suo Corso di Geometria analitica, ultimo da lui tenuto presso la R. Università di Roma prima del suo collocamento a riposo, e gli tributarono solenni onoranze. Come segno di affettuosa ammirazione verso il Maestro, che con l'opera scientifica e didattica ha tenuto alto il nome d'Italia, e venendo incontro ad un vivo generale desiderio, in tale occasione i suoi principali scritti sono stati raccolti nel volume che ora vede la luce.

Da questo — oltre ai ben noti Trattati (dedicati alla Geometria analitica, al Calcolo delle probabilità ed ai fondamenti della teoria della Relatività) — sono state escluse le prime ricerche di geometria proiettiva, quelle svolte in collaborazione coll'Enriques, ed i lavori aventi carattere didattico o filosofico. Le 31 Memorie ch'esso comprende riguardano tutte la Geometria algebrica, tranne l'ultima ispirata da un problema che interessa il Calcolo delle probabilità, e gli conferiscono un'impronta unitaria per i profondi — talora imprevedibili — legami che fra loro intercedono. In tal guisa il volume, pur lasciando in ombra aspetti notevoli dell'attività scientifica del Castelnuovo, dà la giusta misura delle ardue difficoltà superate da questo Geometra, e mostra come, per merito suo, si siano venuti formando ed elaborando alcuni dei metodi e dei concetti tuttora dominanti nella Geometria algebrica.

Per ben comprendere l'importanza dell'opera del Castelnuovo, convien riflettere che — agli inizî di questa, ossia intorno al 1890 — ben poco si conosceva sulla Geometria sopra le superficie algebriche; mentre invece la Geometria sopra le curve algebriche che, particolarmente in Germania, già aveva raggiunto un alto grado di perfezione, veniva in quel tempo in Italia — specialmente da Corrado Segre e dallo stesso Castelnuovo — trasportata nel terreno da noi più familiare della Geometria proiettiva iperspaziale. Si imponeva allora il problema di estendere alle superficie i risultati acquisiti per le curve, problema al cui studio sistematico si accinsero il CASTELNUOVO e l'ENRIQUES col noto magnifico successo; ma l'estensione doveva essere tutt'altro che agevole, e differenze profonde dovevano riscontrarsi nel passaggio dall'un caso all'altro.

Fra i risultati più belli, a cui il nome del CASTELNUOVO resta indissolubilmente legato, sono anzitutto da citare il teorema sulla razionalità delle involuzioni piane, e quello che fornisce le condizioni necessarie e sufficienti per la razionalità di una superficie algebrica; entrambi estendono proprietà ben conosciute, e relativamente elementari, delle curve algebriche: che però l'estensione fosse alquanto riposta, risulta a posteriori dal fatto che il primo teorema (come ha mostrato l'ENRIQUES) non si trasporta agli spazi a 3 o più dimensioni, e che ancor oggi si è assai lontani dal possedere un teorema analogo al secondo per le varietà superiori. Nelle Memorie sugli argomenti suddetti (XX e XXI del volume) giuoca in modo essenziale la considerazione dei successivi aggiunti di un dato sistema lineare di curve, il cui uso metodico risale appunto all'A., e vengono utilizzati risultati, dall'A. stabiliti in numerosi precedenti lavori (qui riportati), concernenti le superficie che contengono sistemi lineari di curve iperellittiche o di genere sufficientemente basso.

Un altro gruppo di Memorie fondamentali è quello dedicato alla teoria generale dei sistemi lineari di curve tracciati sopra un piano o sopra una superficie algebrica qualunque. I sistemi lineari di curve piane erano stati studiati da punti di vista svariati da CREMONA, NOETHER, BERTINI, CAPORALI, DEL PEZZO, GUCCIA, JUNG, MARTINETTI, ecc.; ma grazie al CASTELNUOVO la loro teoria assunse un assetto organico, coll'ispirarsi a concezioni invariantive che solo in parte trovansi nei lavori anteriori, venendo pure integrata da importanti risultati relativi alla massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere, alle curve fondamentali ed ai sistemi lineari sovrabbondanti. Lo studio dei sistemi lineari di curve sopra una superficie si presentava invece quasi completamente nuovo, e doveva risultare ben più difficile; lo iniziò l'ENRIQUES, nel 1893, e lo continuò il CASTELNUOVO che, valendosi di penetranti considerazioni (che oggi ancora meriterebbero di venir proseguite) concernenti i sistemi lineari di superficie nello spazio ordinario, riuscì a mostrare come l'irregolarità di una superficie si rifletta sui caratteri dei suoi sistemi lineari completi. Al legame intercedente fra l'irregolarità e le proprietà trascendenti della superficie l'A. ha poi dedicata un'altra notevolissima Memoria, nella quale egli per primo ha introdotta ed abilmente sfruttata la così detta varietà di PICARD di una superficie irregolare.

Questa Memoria può venir raccostata alle interessanti ricerche sulla geometria delle varietà abeliane, in particolare delle varietà di JACOBI, comprendenti lo studio delle corrispondenze univoche tra gruppi di p punti sopra una curva algebrica di genere $p > 0$, e svariate applicazioni alle serie algebriche di gruppi di punti sopra una curva algebrica. Su quest' ultimo argomento, che poi ha ispirato numerosi lavori di R. TORELLI, ROSATI e COMESSATTI, sono da mentovare i teoremi (ottenuti quasi contemporaneamente dal CASTELNUOVO e dall'HUMBERT) sull'inesistenza di un'infinità continua d'involuzioni irrazionali e sulla linearità delle involuzioni più volte infinite sopra una curva, ed il criterio numerativo per riconoscere quando un sistema ∞^1 di gruppi di punti su di una curva è costituito da gruppi equivalenti.

Nel libro in esame trovansi inoltre la prima dimostrazione rigorosa del celebre teorema di NOETHER che afferma la decomponibilità in fattori quadratici di ogni trasformazione cremoniana fra due piani, la dimostrazione del teorema di KRONECKER–CASTELNUOVO, secondo cui le sole superficie algebriche irriducibili dello spazio che ammettono ∞^2 sezioni piane spezzate sono le rigate e la superficie di STEINER, vari notevoli contributi alla classificazione delle superficie algebriche mediante i loro invarianti, e molti altri risultati su cui — causa ragioni di spazio — qui non ci si può intrattenere.

L' Opera riesce singolarmente istruttiva per lo stile inconfondibile dell'A., che ivi affronta sempre problemi non facili e di alto interesse, giungendo al nocciolo delle questioni con limpidità, eleganza e relativa semplicità di mezzi. Il pregio di essa è poi ancora accresciuto da 18 postille che seguono i singoli lavori o gruppi di lavori, nelle quali l'A., da un lato, stabilisce i collegamenti delle sue ricerche con quelle che le precedettero o proseguirono, mettendo così in luce la novità e la fecondità delle idee contenute nelle prime e la continuità delle indagini della scuola geometrica italiana durante uno dei periodi più gloriosi della sua attività; d'altro lato, riprendendo abbozzi di lavori lasciati incompiuti, segnala alcuni interessanti temi di ricerca.

Il volume, tipograficamente eccellente, contiene l'elenco cronologico completo delle pubblicazioni del CASTELNUOVO (fino al 1937) e la riproduzione di una medaglia d'oro coll'effige del Maestro, a questi offerta durante la cerimonia di cui s'è detto in principio.

BENIAMINO SEGRE

J. PÉRÈS: *Cours de mécanique des fluides*. (Gauthier-Villars, 1936). (Publié avec la collaboration de L. MALAVARD). Prix Fr. 80.

È un ottimo libro scolastico adatto per iniziare i giovani che hanno la sufficiente cultura matematica allo studio della meccanica dei fluidi, « donc le but principal est d'assurer le futur technicien dans le maniement de l'outil mathématique ».

Dopo una introduzione di calcolo vettoriale, l'A. espone nei primi tre capitoli i fondamenti della classica teoria dei fluidi perfetti, insistendo giustamente sulle restrizioni di varia natura che questa teoria impone. Esposizione chiara e semplice, che sarebbe stata anche più semplice ed espressiva se l'A. avesse usato il calcolo vettoriale direttamente, e non il calcolo cartesiano per poi tradurlo in formule vettoriali.

Nel Cap. IV passa ai moti piani. Poichè per lo studio di questi è indispensabile la teoria delle funzioni analitiche, l'A. ne dà un sufficiente sviluppo, illustrandola con esempi tratti dagli stessi problemi idrodinamici; dopo di che, nel capitolo seguente, può trattare in pieno il problema delle correnti rettilinee irrotazionali e permanenti che investono un ostacolo, e indi la teoria dell'ala portante di lunghezza infinita fondata da JOUKOWSKI. Quest'ultima trattazione è veramente notevole per una certa eleganza di forma ora analitica e ora geometrica che dà maggior risalto ai risultati e li rende facilmente applicabili allo studio dei principali profili d'ala (JOUKOWSKI, KARMAN, TREFFTZ, ecc.).

La teoria delle correnti rettilinee irrotazionali e permanenti che investono un ostacolo è estesa nel Cap. VI al caso delle correnti non rettilinee, passando opportunamente da casi particolari al caso generale. Con notevole finezza analitica sono calcolate le forze relative a una corrente stazionaria che comporta delle singolarità. Dalle cose esposte la teoria elementare del biplano ne discende con relativa facilità. Per teorie più complete l'A. rimanda il lettore al bel trattato del prof. PISTOLESI (Aerodinamica).

L'abilità matematica dell'A. si rende ancor più manifesta nel Cap. VII, ove son studiati i moti piani irrotazionali non stazionari dovuti a ostacoli con moto qualunque. Vedasi in particolare la bella soluzione del problema riguardante la determinazione d'una funzione analitica in un cerchio e la sua applicazione al calcolo delle pressioni. Segue poi uno studio del moto dei centri vorticosi ed una chiara esposizione dell'importante teoria di KARMAN relativa alla resistenza.

Al noto problema dello scia è dedicato il Cap. VIII. Qui in una felice sistemazione sono presentati i classici metodi e risultati di LEVI-CIVITA, di VILLAT e dei loro continuatori.

Con questo capitolo termina la parte riguardante i moti piani, dove lo strumento delle funzioni analitiche e delle rappresentazioni conformi offre un potente mezzo d'indagine. Nei moti spaziali questo strumento manca, ed è la teoria delle funzioni armoniche di tre variabili che ne prende le veci. Perciò il metodo di ricerca cambia del tutto, pur ritrovando nei risultati manifeste analogie coi moti piani.

Come già nel Cap. IV, l'A. espone nel Cap. IX le proprietà delle funzioni armoniche e le classiche formule ad esse relative trattando in pari tempo problemi idrodinamici; dal che nasce un'esposizione chiara, snella, istruttiva.

Infine, premessa la classica teoria dei vortici, nei due ultimi capitoli (XI e XII) sono spiegate le moderne teorie di PRANDTL e di OSEEN. La prima, com'è noto, riguarda l'ala d'ampiezza finita. Con opportune ipotesi approssimative l'A. tratta il problema direttamente in modo semplice, curando i confronti dei risultati della teoria con l'esperienza. La seconda tratta delle scie, considerandole non più come formate di fluido morto, ma di vortici nati in superficie dalla viscosità del fluido. Però l'A. tratta la questione senza fare intervenire direttamente la viscosità; mettendo invece in evidenza certe proprietà puramente qualitative che l'intuizione suggerisce. Con ciò la sua esposizione evita parecchie complicazioni e facilita la comprensione della teoria stessa.

Il libro del PÉRÈS è dunque raccomandabile sotto ogni rispetto. Esso ben raggiunge il fine di preparare lo studioso alla lettura di opere più complete ed a seguire da presso le numerose ricerche odierne. *p. b.*

A. BUHL: *Nouveaux Éléments d'Analyse. Calcul Infinitésimal. Géométrie. Physique Théorique*; T. I, Variables Réelles (pagine VIII+204). Paris, Gauthier-Villars, 1937.

L'A. in vista delle necessità della fisica moderna ha voluto associare all'esposizione dei fondamenti dell'Analisi quella dei principî della Fisica Teorica e della Geometria, e in massima parte vi è riuscito; quanto sia di originale in questa costruzione è stato riassunto dall'A. in un interessante articolo: *Espaces fibrés, Groupes, Quanta,* pubblicato di recente nell'« Enseignement Mathématique » [vol. 36, (1937), pp. 49–62].

Il volume presuppone familiarità con i corsi del nostro biennio propedeutico; i varî argomenti, esposti con vivace semplicità, non esimono però lo studioso di ripensare sui varî punti e di integrare molte questioni, rapidamente abbozzate, con letture più ampie.

Il primo capitolo, *Insiemi, misure, microstrutture,* richiama sobriamente alcuni concetti ormai largamente approfonditi dalla critica matematica dell'ultimo trentennio.

Il capitolo II dedicato alle forme differenziali, alle trasformazioni integrali, alle formule stoksiane e in generale agli integrali che restano invariati per una deformazione del campo di integrazione rappresenta, con le sue ardite innovazioni rispetto alle tradizionali esposizioni, la base di tutta la successiva trattazione. L'A. parte dalle identità integrali fondamentali

$$\int_{\Gamma} X dY = \iint_{\Sigma} dX dY, \quad \iint_{\Sigma} X dY dZ = \iiint_{V} dX dY dZ,$$

e le mette in relazione con equazioni differenziali, onde, spazi canali, equazioni di MONGE-AMPÈRE, equazioni canoniche, equazioni di MAXWELL, equazione di D'ALEMBERT.

Il capitolo III, *Funzioni di linea, volumi, aree,* contiene agili trasformazioni di integrali curvilinei e di formule relative a volumi ed aree, precisandone i significati intrinseci.

La *Teoria delle superficie* del capitolo IV è sopratutto originale per la rapidità con la quale sono ricavate le formule di O. BONNET, di GAUSS, di A. GIRARD-CAVALIERI; il lettore vi troverà pure un rapidissimo cenno di geometria non-euclidea.

Il capitolo V, *Nozioni sulle trasformazioni, Gruppi,* applica il problema del cambiamento delle variabili nelle espressioni differenziali alla trasformazione di LORENTZ; l'A. richiama poi, con estrema rapidità, la teoria delle matrici di ordine finito, i gruppi di trasformazioni lineari, le operazioni lineari del primo ordine e la classica identità di JACOBI, i sistemi di MAURER-CARTAN e i gruppi di LIE.

Le *Nozioni di Calcolo Differenziale assoluto* del capitolo VI provano l'alto valore di questa teoria rispetto alla costruzione delle teorie einsteiniane; l'A. si sofferma sul parallelismo di LEVI-CIVITA e sulle linee geodetiche del campo solare; a chiusura del capitolo pone le identità di BIANCHI e le equazioni generali di EINSTEIN.

Il capitolo VII, *Equazioni canoniche,* ancor più dei precedenti è uno sguardo ai procedimenti della meccanica analitica, con qualche rilievo sulle applicazioni alla meccanica moderna.

Ogni capitolo è seguito da esercizi utili per dirigere lo studioso verso questioni più elevate; in complesso l'idea originale che l'A. ha avuto di porre in unico quadro cose diverse, che di solito stanno in trattazioni disparate, può dirsi riuscita.

GIOVANNI SANSONE

SPAETH, THIRRING, MARK, HEISENBERG, MENGER: *Neuere Fortschritte in den exakten Wissenschaften.* Fünf Wiener Vorträge. Dritter Zyklus. p. 132. Franz Deuticke, Leipzig und Wien. 1936. M. 3,60.

Questo terzo fascicolo delle Conferenze di Vienna sulle scienze esatte si allontana dalla matematica pura un po' più dei precedenti (1), poichè questa vi è rappresentata soltanto un po' lontanamente dall' ultima conferenza: *Einige neuere Fortschritte in der exakten Behandlung sozialwissenschaftlichen Probleme* di KARL MENGER: ma l' interesse culturale e filosofico — proprio per quanto riguarda gli indirizzi di pensiero più prossimi alla matematica — non ne è per nulla minore.

Carattere prevalentemente culturale e informativo ha la prima conferenza *Vitamine und ihre Bedeutung* di ERNST SPAETH che ci dà notizia del significato biologico e della natura fisico-chimica delle vitamine, rimasta per tanti anni enigmatica. Ma nell' ordine d' idee delle *scienze esatte* porta tosto una nota saliente la seconda conferenza *Die physikalischen Entdeckungen der letzten Jahre,* ove HANS THIRRING ci offre una esposizione storica e nello stesso tempo una logica coordinazione dei risultati sperimentali che, in questo scorcio del XX secolo, hanno portato alle attuali conoscenze sulla struttura dell' atomo: le scoperte dell' ultimo decennio del diciannovesimo secolo, mentre risolvevano a favore dell' atomo la lotta fra le due concezioni dei fenomeni fisici — quella atomistica appoggiata alle leggi delle reazioni chimiche e alle teorie cinetiche, e quella strettamente fenomenologica appoggiata alle teorie energetiche — toglievano al nome di « atomo » il suo primitivo significato di ultime indivisibili parti della materia; tuttavia, se ipotetica aveva dovuto apparire ai fisici dei secoli precedenti la costituzione atomica per la impossibilità di sottoporre a esperimento l' atomo singolo, a più forte ragione lo fu dapprincipio quella affermata nel 1912-13 dal modello atomico di BOHR e VAN DER BROEK: ed il riconoscimento sperimentale degli elementi costitutivi non poteva essere che indiretto ed *a priori*, quindi dubbioso od almeno opinabile. In modo magistrale il THIRRING pone in evidenza come osservazioni sottili circa le apparenze sperimentali impongano logicamente, riguardo al meccanismo causale di cui esse sono la manifestazione visibile, una interpretazione univoca, che si afferma nella scoperta dei componenti subatomici: elettroni protoni positroni neutroni. Ma se tale scoperta, per finezza logica e sperimentale, può parere abbia qualcosa del miracoloso, al compimento del miracolo ha contribuito in misura non indifferente la

(1) Dei quali il « Bollettino » ha dato notizia nelle annate 1934 e 1935.

tecnica, quella stessa che, applicando le conquiste teoriche del secolo scorso, ha dato molte delle meraviglie della attuale nostra vita civile: la tecnica, che ha permesso di condurre esperimenti in condizioni d'ambiente (temperatura, pressione, campo) quali la natura presenta soltanto negli astri e negli spazi siderali o, a nostra conoscenza, non presenta affatto: del come e quanto si raggiungano tali condizioni eccezionali, e con quali risultati sperimentali, narra in modo avvincente H. MARK nella terza conferenza: *Extreme Versuchbedingungen als Quelle des Fortschrittes.*

Delle conquiste sperimentali della fisica moderna H. THIRRING ci ha parlato nel linguaggio medesimo della fisica classica: in opposto ordine d'idee desta un interesse di primo piano la quarta conferenza: *Prinzipielle Fragen der modernen Physik* di W. HEISENBERG, che porta nell'argomento l'autorità del caposcuola: egli tratta della *revisione* che le nuove teorie impongono alle nostre concezioni fisiche fondamentali e del suo contenuto filosofico: ed in questa revisione ha posizione centrale il *principio d'indeterminazione* dovuto all'HEISENBERG medesimo. Quello di cui l'HEISENBERG vorrebbe persuaderci è che il valore filosofico del « principio » sta precisamente nel sacrificio che esso ci chiede delle nostre consuetudini logiche e intuitive; perciò le teorie quantistiche aprono realmente nuovo campo al nostro pensiero e sarebbe erroneo l'ammettervi un grado qualsiasi di provvisorietà che una più precisa conoscenza di « cause » possa sostituire con conclusioni deterministiche: perciò esse costituiscono una conquista da cui nessun progresso scientifico potrà farci tornare indietro. Nonostante l'autorità dell'A., ci sia permesso qualche dubbio: non certo sull'argomento onde egli prende le mosse: certo la meccanica classica non è che un quadro logico-verbale, le cui affermazioni trovano verifica in quanto siano interpretabili, nel *fatto* che la realtà ci offre, le nozioni fondamentali su cui esso è costruito: e perciò il fisico teorico è pronto ad applicare la costruzione matematica ad altri schemi: ma ci pare ripugni ad ogni concezione di scienza che « le inintuibili indicazioni delle leggi quantistiche debbano formare per sempre una parte costitutiva della teoretica scientifica » (p. 98); perchè scopo della scienza è proprio quello di portare i fatti bruti nel dominio della logica e dell'intuizione e la nostra mente ha risorse tali da non permetterci di disperare della conciliazione. Ed è da tener presente che anche la parola « quantistico » ha assunto un significato quanto mai variabile ed arbitrario; perchè nulla lega propriamente i fatti sperimentali da cui inizialmente è derivata l'ipotesi quantistica (conquista questa che tutto lascia presumere definitiva) ai successivi sviluppi astratti delle cosidette meccaniche quantistiche.

L'ultima conferenza, quella del MENGER ricordata in principio, ci porta fuori del campo della fisica, in un dominio che ha destato non poche speranze negli anni intorno al principio del secolo: l'applicazione del ragionamento matematico ai problemi economici e sociali. Se pure è vero che, molto più di quanto suppone il discorritore empirico, tali problemi sono dominati da talune ferree leggi logiche e quantitative, si trovano queste siffattamente frammiste a elementi psicologici e morali che poco seguito hanno avuto quelle speranze: il MENGER, dopo aver riferito intorno a quelle ricerche classiche, espone un nuovo indirizzo personale che, mediante l'introduzione di considerazioni combinatorie e gruppali, dovrebbe meglio adattarsi a tener conto anche di questi elementi. B. LEVI

EDGARDO CIANI: *Scritti geometrici scelti.* Padova, Cedam, 1937-XV. Due volumi di complessive pagine 902, L. 100.

Come manifestazione d'affetto a E. CIANI, che per limiti d'età col novembre 1936 abbandonava l'insegnamento, la Facoltà di Scienze dell'Università di Firenze ha voluto contribuire alle spese di stampa di questi due volumi i quali ne raccolgono l'opera geometrica: un cinquantennio di studio, con 51 pubblicazioni, dalla tesi di laurea su *Le superficie rigate inerenti a una linea a doppia curvatura* del 1886 alla Nota Lincea del 1935 *Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche.* Ma, aprendo il libro, prima ancora che il geometra ci si presenta l'uomo, con tre brevi pagine piene di quell'affetto semplice e caldo che nell'animo del CIANI trova posto per tutti e per tutto: maestri e discepoli e amici e congiunti e infine la sua scienza e un poco l'opera sua. Della quale opera piace al CIANI indicare tre risultati come principali: 1°) La scoperta di una particolare configurazione formata colle bitangenti a una quartica; 2°) quella delle biquintuple di rette dello spazio a tre dimensioni; 3°) quella dell'esagono di PASCAL dello spazio a quattro dimensioni. Basta forse questo a indicare, nel suo carattere generale, l'opera matematica del CIANI: opera puramente geometrica e più strettamente algebrico-projettiva (poichè la sola tesi di laurea appartiene alla geometria differenziale) e nella massima parte rivolta ad allargare le nostre conoscenze sopra curve e superficie dei primi gradi superiori al secondo (particolarmente del quarto e del quinto ordine), i loro sistemi, le configurazioni e i gruppi di collineazioni che ad esse si collegano. Di questo ordine di ricerche, col prevalere di indirizzi più studiosi delle proprietà generali degli enti e meno curiosi dei particolari, s'è andato negli ultimi anni quasi spegnendo il gusto: ad esso ci richiama il CIANI; e noi vogliamo esprimere un augurio: che « dalle montagne del suo Appennino » egli possa e voglia scendere frequentemente e per molti anni a noi coll'usata serenità d'animo e vivezza di spirito ed aggiungere qualche pagina al suo lavoro. B. LEVI

FRIEDRICH SCHILLING: *Pseudosphärische, hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie.* B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1937. Prezzo (rilegato) RM. 16.

Una nuova pregevole opera sulla geometria non euclidea viene ad aggiungersi a quelle precedentemente pubblicate dallo SCHILLING (*Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie,* 2ª ed., Leipzig, 1935; *Projektive nnd nichteuklidische Geometrie,* 2 voll., Leipzig, 1931). Come il titolo lascia capire, essa si scinde in tre parti che si possono sostanzialmente qualificare come relative la prima alla pseudosfera, la seconda e la terza alla sfera, rispettivamente di raggio immaginario puro e di raggio reale.

L'intendimento dell'A. è di giungere coi mezzi più elementari e nel modo più agevole alla geometria non euclidea. Così nella prima parte egli ottiene la metrica iperbolica nel piano attraverso la geometria euclidea sull'ipersfera. A tale scopo egli — presupponendo nel lettore un minimo di cognizioni — prende appunto le mosse dal modello di superficie a curvatura costante negativa offerto dall'ipersfera, come quello destinato a realizzare nei riguardi della geometria iperbolica i medesimi vantaggi che la sfera offre per la geometria ellittica. Muovendo dalla definizione di tale superficie, lo SCHILLING ne studia i movimenti in sè e le linee geodetiche, per passare poi alla interpretazione relativa alla metrica iperbolica nel piano. Cerchi e triangoli geodetici, e la trigonometria pseudosferica sono gli ulteriori argomenti concernenti la pseudosfera sui quali maggiormente si sofferma l'A..

Nella seconda parte, l'A. giunge daccapo alla metrica iperbolica nel piano, ma questa volta a partire dalla metrica euclidea su una sfera di raggio immaginario puro (sfera immaginaria), studiata naturalmente in relazione coi medesimi argomenti (movimenti in sè, geodetiche, cerchi geodetici, ecc.): ciò, senza presupporre la conoscenza della metrica iperbolica acquisita con la prima parte dell'opera, ma con procedimento autonomo. Finalmente nella terza parte la sfera è invece supposta di raggio reale; e la geometria sferica — o per meglio dire la geometria su una semisfera chiusa mediante identificazione dei punti diametralmente opposti del suo contorno — sviluppata in analogia con la seconda parte, serve per la costruzione della metrica ellittica nel piano.

L'opera si segnala per una notevole chiarezza e una minuziosa cura dei particolari. Il lettore viene anche guidato a illuminare i risultati mediante « esperienze » realizzate su modelli.

Lo SCHILLING paragona le diverse vie che si possono seguire per giungere a una determinata teoria alle vie materiali, più o meno difficili, lungo le quali si può scalare una vetta. Egli ha voluto tracciare un sentiero particolarmente agevole, che permetta anche ai meno sperimentati di godere del panorama. Forse qualche lettore avrà talvolta l'impressione che i sentieri molteplici che gli vengono segnalati dall'A. passano in alcuni punti un pò troppo vicini fra loro; ma ciò offre pure il vantaggio di dare un particolare rilievo a determinati aspetti del panorama, sopratutto per chi lo veda per la prima volta. In complesso, il volume dello SCHILLING costituisce un'ottima iniziazione alla geometria non euclidea: dopo la quale il lettore si troverà preparato alla comprensione di punti di vista più elevati e più sintetici.

ALESSANDRO TERRACINI

GEORGES BOULIGAND: *Les définitions modernes de la dimension.* Fasc. V della Collezione « Exposés d'Analyse générale » nelle « Actualités scientifiques et industrielles », Hermann e C., Paris, 1935. Prezzo 12 frs..

Il fascicolo del BOULIGAND prende il suo posto adatto nella collezione iniziata nel 1934 dal FRÉCHET con la sua *Aritmetica dell'infinito.* Esso mira, nei limiti del possibile, a spiegare a un pubblico assai vasto in quali modi la nozione vaga e intuitiva di dimensione è stata tradotta in termini matematici precisi. Dopo un capitolo introduttivo, il BOULIGAND ne dedica tre, di varia mole, a tre diverse categorie di definizioni della dimensione. La prima nasce dalle possibili omeomorfie tra due insiemi puntuali, o fra l'uno di essi e una parte dell'altro, avendosi come punto di partenza la nozione elementare di spazio cartesiano a n dimensioni.

La seconda categoria fa capo sopratutto all'idea di POINCARÉ di adottare una definizione ricorrente, fondata sulla possibilità di decomporre in parti un continuo n-dimensionale mediante continui a $n-1$ dimensioni: idea alquanto imprecisa sulla quale si sono innestate le definizioni precise di BROUWER, di MENGER e di URYSOHN; nel medesimo capitolo si accenna pure al punto di vista della topologia combinatoria. Finalmente la terza categoria di definizioni si riattacca alla teoria generale della misura degli insiemi, secondo CARATHÉODORY, HAUSSDORF e lo stesso BOULIGAND. Il fascicolo è destinato a essere seguito da due altri sullo *Stato attuale della teoria della dimensione.*

ALESSANDRO TERRACINI

D. J. STRUIK: *Theory of linear connections.* « Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete », B. III, H. 2, Berlin, Springer, 1934, pp. VII-68.

Questo libricciuolo già da tre anni è uscito in una Collezione ben nota e diffusa, e ad esso ha già fatto seguito il primo volume di un'opera più vasta redatta sugli stessi argomenti dall'A. in collaborazione con J. A. SCHOUTEN [1]: non occorrerà quindi parlarne a lungo. Si tratta, come è nel carattere e nell'orientamento della collezione, *di uno sguardo d'insieme* sulla teoria delle connessioni lineari: anche di quelle « puntuali » (più precisamente, qui, delle connessioni *proiettive*), che non rientrano nel piano dell'opera più ampia or ora accennata [2]. Il volumetto, di piccola mole ma denso di contenuto, è redatto in modo chiaro e spigliato; l'esposizione degli argomenti, limitata alle linee generali e alleggerita d'ogni sviluppo di calcolo, è preceduta e accompagnata da parecchie notizie storiche e bibliografiche.

Appunto con una breve introduzione storica, che illustra le origini della geometria degli spazi a connessione e i principali orientamenti che ne hanno guidato lo sviluppo, ha inizio il volume. Segue un I Capitolo sull'*Algebra Tensoriale*: con quei perfezionamenti che appunto lo studio delle connessioni ha consigliato. Il II Capitolo è dedicato alle connessioni *affini*: la cui costruzione vien fatta dipendere, seguendo SCHOUTEN, dall'introduzione assiomatica di un differenziale covariante. Anche il punto di vista più geometrico del CARTAN è però convenientemente illustrato dall'A.: il quale poi accenna, fra l'altro, alla connessione metrica di WEYL e a quella riemanniana; e sia nell'aspetto geometrico che in quello formale, alle nozioni di *torsione* e di *curvatura.*

(1) Alludo alla *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.* Sul volume già uscito (P. Noordhoff, Groningen, 1935) di questa « Introduzione » ho già avuto occasione di riferire a pp. 254-261 del volume XIV (1935) di questo « Bollettino ».

(2) Appunto alle *connessioni proiettive* e anche, più in generale, alla geometria proiettiva differenziale è invece dedicato un nuovo libro assai interessante di É. CARTAN (*Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Paris, Gauthier-Villars, 1937).

Ancora le varietà a connessione affine riguarda il III Capitolo: ma in quel particolare aspetto in cui le ha investigate la Scuola americana di Princeton; cioè in relazione al sistema differenziale che ne rappresenta le geodetiche. L'A. dà notizia di alcuni più significativi risultati di WEYL, di VEBLEN e J. M. THOMAS, di T. Y. THOMAS, concernenti la « projective geometry of paths », e in particolare, gli spazi a connessione affine *proiettivamente piani*; dà poi anche un cenno sull'analoga trattazione e sui risultati di WEYL, di SCHOUTEN, di J. M. THOMAS circa le *proprietà conformi* di una V_n riemanniana e le V_n conforme-euclidee. Da una ricerca personale dell'A. ha origine l'accenno (p. 30) a una costruzione che associa una metrica di WEYL a una equazione lineare alle derivate parziali del 2° ordine.

Particolarmente interessante è il seguente Cap. IV, dedicato alle *connessioni hermitiane*. L'A. introduce e caratterizza geometricamente quelle che egli dice « connessioni K_n », in una X_n ad n dimensioni complesse: comprendenti in particolare le connessioni *unitarie*, legate a una metrica hermitiana: indi passa alla connessione spinoriale (*spin connection*), in una V_4 che localmente abbia i caratteri di uno spazio metrico di MINKOWSKI (R_4). L'R_4 locale può interpretarsi come uno spazio spinoriale (*spin space*), considerandovi quali elementi i vettori delle ∞^3 generatrici di una ipersfera. Gli « spinvectors » e in genere le « spinquantities » *o spinori*, grandezze dello spazio spinoriale, d'altra parte si possono anche interpretare quali *quantità hermitiane* nello spazio spinoriale E_4 pensato come un E_2 a due dimensioni complesse (in relazione a certi riferimenti per l'E_4, i cui vettori fondamentali stanno entro a due certi piani invarianti: riferimenti determinati a meno di trasformazioni lineari omogenee *immaginarie coniugate* sui due piani ([1])). La connessione spinoriale è una connessione affine, nel senso generalizzato di KÖNIG, fra gli « spin spaces » associati ai punti della V_4. Riferimenti precisi sullo sviluppo storico di questa teoria, sulla bibliografia relativa e sulle applicazioni alla moderna fisica quantistica sono date dall'A., specialmente a p. 40.

Il Cap. V è dedicato alle *connessioni proiettive*: trattate nell'indirizzo segnato da un lavoro di D. v. DANTZIG, che utilizza le coordinate curvilinee *omogenee*. Su questo metodo, che ha già avuto ad opera dell'A. e di J. A. SCHOUTEN delle interessanti applica-

([1]) Ved. pp. 38-39 e la Nota: *Die Darstellung der Lorentzgruppe in der komplexen* E_2 *abgeleitet aus den Diracschen Zahlen* di J. A. SCHOUTEN (« Proceedings Kon. Akad. Amsterdam, », 33, 1930, 189-197).

zioni [1], opportunamente l'A. richiama qui l'attenzione. Ma la vera essenza geometrica del metodo non mi sembra ancora sufficientemente chiarita.

Un ultimo Capitolo delinea lo studio, con l'ausilio formale della « *D*-simbolica », delle *connessioni indotte* in una varietà immersa in uno spazio dotato di connessione lineare. Pel caso in cui l'ambiente è riemanniano l'A. giunge alle equazioni di GAUSS e CODAZZI e a quelle che seguendo SCHOUTEN e v. KAMPEN egli dice *formule di Frenet* generalizzate: da vicino collegate con risultati di E. BOMPIANI e miei sulle « geometrie riemanniane di specie superiore ». Tornando al caso di un ambiente a connessione lineare (affine) qualunque l'A. espone gli elementi della teoria delle curve (secondo HLAVATY) e infine un cenno sulle varietà immerse in varietà a connessione proiettiva. Con un *Indice Bibliografico*, accurato ed esteso se pure — come lo stesso A. avverte — non completo, ha termine il volume. ENEA BORTOLOTTI

ROTHE R.: *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure.* Teil III, pagg. X+238, Teil IV, H. 2, 5, 6. Leipzig, B. G. Teubner, 1935-37.

Con questi volumi viene a compimento l'interessante trattato di Matematiche Superiori del prof. ROTHE, la cui pubblicazione era stata iniziata nel 1925. Esso riproduce le lezioni tenute dall'A. alla Techn. Hochschule di Berlino, ed è diviso in quattro volumi: i primi tre sono riservati alla esposizione delle principali teorie dell'algebra e del calcolo infinitesimale, il quarto è dedicato esclusivamente alle applicazioni.

Come già si ebbe occasione di rilevare nelle recensioni dei volumi I e II (« Boll. U. M. I. », anno IV, n. 2, anno X, n. 2), sono pregi notevoli del trattato il rigore dell'esposizione, talvolta un po' troppo schematica, i molteplici esempi inseriti nel testo, la nitida veste tipografica e le numerose figure.

Il Cap. I del vol. III tratta delle superficie e delle loro rappresentazioni analitiche. Nel Cap. II si studiano gli integrali curvilinei nello spazio, gli integrali doppi e multipli e se ne fanno varie applicazioni (fra l'altro, si stabiliscono i teoremi di STOKES, GAUSS, GREEN). Nel Cap. III ed ultimo, l'A. espone i fondamenti

[1] Per le citazioni rimando alla Memoria pubblicata da me e dal collega V. HLAVATY negli « Annali di Matematica » (serie IV, tomo XV, 1936, pp. 1-45, 129-154): ove la trattazione delle *connessioni proiettive* è ispirata a vedute assai diverse, che più si accordano con quelle originarie del CARTAN.

della teoria delle equazioni differenziali ordinarie ed alle derivate parziali, soffermandosi in modo particolare su quei tipi classici che più frequentemente si presentano nelle matematiche applicate.

Nei fasc. 2°, 5°, 6° del vol. IV sono raccolti 435 esercizi sul calcolo differenziale delle funzioni di due o più variabili, sulla geometria differenziale delle curve piane e delle superficie, sui numeri complessi, sugli integrali e le equazioni differenziali. Questi esercizi, ben scelti ed esaurientemente svolti, trattano questioni di matematica pura, fisica e meccanica. (*l. o.*)

REINHARDT K.: *Methodische Einführung in die höhere Mathematik.* Pagg. VI+270. Leipzig, B. G. Teubner, 1934.

Questo libro è scritto per i giovani che intendono dedicarsi allo studio delle matematiche superiori. Il precipuo scopo che si propone l'A. è quello di far conoscere i capisaldi delle più importanti teorie dell'Analisi e di addestrare il lettore nell'uso dei metodi del Calcolo infinitesimale.

Muovendo dal problema della quadratura di una superficie piana (trattato elementarmente in alcuni casi particolari: area del segmento di parabola, di sinusoide, ecc.), l'A. perviene, a poco a poco, alla nozione di integrale definito.

In un secondo tempo, Egli introduce i concetti di derivata e di integrale indefinito, cui fa seguire le usuali regole di derivazione ed integrazione e varie applicazioni geometriche.

L'ultima parte dell'opera è dedicata allo studio dei principali algoritmi infiniti: serie, prodotti infiniti, frazioni continue, con alcuni cenni sulle serie di potenze e trigonometriche. Vengono, successivamente, brevi nozioni sulle funzioni razionali intere e su quelle di due o più variabili reali.

Corredano il volume varie note storiche e bibliografiche, numerosi esercizi ed oltre un centinaio di figure. (*l. o.*)