UMI

Sunti di lavori Italiani

* Lavori di: Cataldo Agostinelli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.4, p. 183–184.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_4_183_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1937.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

CATALDO AGOSTINELLI: *Sopra l'integrazione per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi.*

Con questo titolo è stato di recente pubblicato, nelle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, un mio lavoro [1] nel quale ho ripreso ed esaurito il classico problema posto da STAECKEL nel 1891 e relativo alla determinazione di tutti i tipi di equazioni di HAMILTON-JACOBI relative ai sistemi dinamici con vincoli indipendenti dal tempo, integrabili mediante separazione di variabili.

Lo STAECKEL, com'è noto, risolveva la questione nel caso in cui la forza viva è una forma quadratica ortogonale e assegnava le condizioni per la possibilità del problema. Quelle condizioni furono in seguito ricavate sotto altra forma da LEVI-CIVITA nel 1904, e questo Autore stabiliva inoltre un *criterio di classificazione* di tutti i problemi dinamici risolubili per separazione di variabili, risolvendo il problema nell'ipotesi che i coefficienti a_{rs} della forma quadratica $2T = \Sigma_{rs} a_{rs} x'_r x_s'$, che definisce la forza viva T, dipendano soltanto dalle variabili x_r, x_s aventi gli stessi indici, ma non andava oltre a causa della grande complessità di calcoli che richiedeva la trattazione della questione.

Successivamente il DALL'ACQUA, in una pregevole ricerca del 1908, sebbene attraverso calcoli molto laboriosi, risolveva completamente la questione nel caso di tre variabili, e infine il BURGATTI, in una Nota dei Lincei del 1911, assegnava, per via intuitiva, nel caso di n variabili, $n-1$ nuovi tipi di equazioni di HAMILTON-JACOBI che ammettono l'integrazione per separazione di variabili, senza però dimostrare se quei tipi fossero i più generali.

Rimaneva pertanto da affrontare ancora ed esaurire, nel modo più generale e sistematico, la risoluzione del problema nel caso

[1] C. AGOSTINELLI, (« Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino », Serie 2ª, Tomo 69, Parte I, a. 1937-XV).

di n variabili. In ciò sono riuscito nella Memoria suddetta servendomi dell'*Analisi vettoriale* negli iperspazi e di alcuni risultati stabiliti da BOGGIO in questo campo, e utilizzando inoltre il criterio di classificazione e di riduzione di LEVI-CIVITA, determinando così tutti i tipi di forze vive per cui l'equazione di HAMILTON-JACOBI, in assenza di forze, è integrabile per separazione di variabili. In una Nota successiva [1] ho determinato anche il potenziale delle forze nel caso in cui queste non sono nulle.

Nella mia ricerca ho introdotto, con BOGGIO, la *varietà vincolare* V_n descritta dal punto $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tale che $dQ^2 = 2Tdt^2$, e su di essa ho operato con successo, con notevoli semplificazioni di calcoli e mettendo in luce delle proprietà geometriche notevoli relative alla struttura della varietà vincolare, le quali mi hanno reso possibile l'integrazione delle equazioni di condizione e quindi la risoluzione esauriente della questione.

Procedendo per gradi, in un primo caso, ho rilevato che le ipersuperficie $x_n =$ cost. della varietà vincolare sono applicabili sopra un S_{n-1} euclideo, e questo risultato mi ha consentito di assegnare agevolmente, in questo caso, la risoluzione del problema.

Passando al caso generale ho stabilito che la varietà vincolare V_n deve essere tale che i sistemi di varietà W_k immerse in V_n e definite da $x_{k+1} =$ cost., $x_{k+2} =$ cost., ..., $x_n =$ cost., (ove $1 < k < n-1$), devono essere applicabili su un S_k euclideo. In base a questo risultato ho potuto risolvere il problema anche in questo caso, assegnando due soluzioni nelle quali interviene un sistema $(n-k)$-plo ortogonale costituito da ipersuperficie coordinate.

Ho considerato poi direttamente il caso di $k = 1$ e infine ho dimostrato come dalle relazioni da me stabilite segua subito, in particolare, la soluzione corrispondente al caso di STAECKEL.

[1] C. AGOSTINELLI, *Sulle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione di variabili*, (« Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti », a. 1936-37, Tomo XCVI, Parte 2ª).