CARLOS BIGGERI

Sulle serie di Dirichlet

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **16** (1937), n.4, p. 178–182.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_4_178_0>

Sulle serie di Dirichlet.

Nota di CARLOS BIGGERI (a Buenos Aires).

Da una lettera al prof. BEPPO LEVI.

Sunto. - *Si dimostrano alcune proposizioni relative alla singolarità del punto* z = 0 *per la funzione analitica* f(z) *definita da una serie di* DIRICHLET.

La parte reale del coefficiente a_n della serie di DIRICHLET

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \tag{1}$$

non sia mai negativa e supponiamo che le ascisse di convergenza semplice ed assoluta della serie siano

$$C = C' = 0 \tag{2}$$

e che indicando con φ_n l'argomento di a_n sia

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1. \tag{3}$$

Poniamo con A. OSTROWSKI [1]

$$O_n \equiv \sum a_m \cdot \left(\frac{\lambda_m \cdot \sigma \cdot e}{n}\right)^n \cdot e^{-\sigma \cdot \lambda_m}$$

dove la somma è estesa ai valori di m per cui

$$\frac{n}{\sigma} \cdot (1 - \omega) \leq \lambda_m \leq \frac{n}{\sigma} \cdot (1 + \omega),$$

essendo $\sigma > 0$ e $0 < \omega < 1$, arbitrariamente fissati. Il criterio dell'OSTROWSKI afferma che condizione necessaria e sufficiente affinchè il punto $z = 0$ sia *regolare* per $f(z)$ è che si abbia

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} < 1.$$

Poichè la disuguaglianza

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} > 1,$$

non è realizzabile, si conclude che condizione necessaria e suffi-

[1] A. OSTROWSKI, *Ueber das Hadamardsche Singularitätskriterium in der Theorie der Taylorschen und Dirichletschen Reihen*, « Sitz. Berl. Math. Ges. », t. 27, 1928.

ciente affinchè il punto $z=0$ sia singolare per $f(z)$ è che si abbia

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|}=1.$$

Ciò premesso, chiamiamo O_n' e R_n rispettivamente le espressioni che si ottengono sostituendo in O_n al coefficiente a_m la sua parte reale $\rho_m \cos\varphi_m \geq 0$ e il suo modulo ρ_m.

Si ha

$$|O_n| \geq O_n'. \tag{4}$$

Se chiamiamo $\cos\varphi_\xi$ il minore (in senso lato) dei valori di $\cos\varphi_m$, per i valori di m soddisfacenti la doppia relazione

$$\frac{n}{\sigma}\cdot(1-\omega)\leq\lambda_m\leq\frac{n}{\sigma}\cdot(1+\omega),$$

avremo

$$O_n' \geq \cos\varphi_\xi \cdot R_n. \tag{5}$$

Dato che $C'=0$, in virtù di un teorema del LANDAU (¹) (il quale generalizza alle serie di DIRICHLET, il teorema del VIVANTI), il punto $z=0$ è singolare per la funzione analitica definita dalla serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\cdot e^{-\lambda_n\cdot z}; \tag{6}$$

per conseguenza, sarà

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{R_n}=1.$$

Tenendo conto della formola del KOJIMA (²) per il calcolo di C, dalle ipotesi (2) e (3) segue

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos\varphi_\xi}=1,$$

e quindi per (4) e (5)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|O_n|}=1;$$

a causa del criterio di OSTROWSKI *il punto* z $=0$ *è dunque singolare per* f(z). Ho così dimostrato il teorema II enunciato nella mia Nota: *Sulle singolarità delle funzioni analitiche* (³) dove, come Le

(¹) E. LANDAU, *Ueber einen Satz von Tschebyschef*, « Matematische Annalen », t. 61, 1905.

(²) T. KOJIMA, *On the convergence abscissa of general Dirichlet's series*, « Tôhoku Journal », t. 6, 1914.

(³) Questo « Bollettino », Dicembre 1936.

dissi, deve essere aggiunta la condizione dell'uguaglianza delle ascisse di convergenza semplice ed assoluta.

OSSERVAZIONI: I) Affinchè sia $C = C'$ è sufficiente che

$$\operatorname{tg} \varphi_n = O(e^{\varepsilon\lambda_n})$$

per ogni $\varepsilon > 0$, come si vede applicando la formola del KOJIMA per il calcolo di C. Questa condizione è evidentemente soddisfatta nel caso considerato dal FEKETE (1), citato nella mia Nota, ed in generale quando

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[\lambda_n]{\cos \varphi_n} = 1$$

e quindi anche quando, verificandosi la (2), il limite massimo di $n : \lambda_n$ è finito.

II) Anche nel teorema III della mia Nota (enunciato senza dimostrazione), relativo agli integrali determinanti (che è, in certo modo, l'analogo del teorema II), occorre aggiungere la condizione che *le ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, dell'integrale siano uguali.*

Mediante il criterio di OSTROWSKI si dimostra pure il seguente

TEOREMA. — *Sia* $\mathrm{p} \equiv \mathrm{p(n)}$ *il minore dei valori di* m *soddisfacenti alla relazione*

$$\lambda_m \geq n$$

e $\mathrm{q} \equiv \mathrm{q(n)}$ *il maggiore dei valori di* m *soddisfacenti alla relazione*

$$\lambda_m \leq 2n.$$

Chiamiamo α_n *il maggior valore (in senso lato) dei valori di* $|\varphi_m - \varphi_{m+1}|$, *per* $\mathrm{p} \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{q}$ *e poniamo*

$$d_n = q - p > 0.$$

Supponiamo che:

1°) $\overline{\lim}\, d_n \alpha_n < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2);

2°) *le ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, della serie* (1) *sono uguali; allora, il punto reale della retta di convergenza è singolare per la funzione analitica,* f(z), *definita dalla serie* (1).

(1) M. FEKETE, *Sur un théorème de M. Landau,* « Comptes Rendus Acad. Sc. », Paris, t. 151, 1910.

(2) Il prof. BIGGERI assegnava nella sua lettera la limitazione

$$\overline{\lim}\, d_n \alpha_n < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2};$$

la lieve modificazione del ragionamento che consente di elevare detto limite è di B. LEVI.

Senza restringere la generalità possiamo supporre $C = C' = 0$. Prendiamo, nella funzione O_n, i valori particolari $\omega = \frac{1}{3}$, $\sigma = \frac{2}{3}$. Si ha

$$O_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=p}^{q} a_m \cdot \lambda_m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}\lambda_m}.$$

Chiamiamo O_n', O_n'' ed R_n le espressioni che si ottengono sostituendo in quest'ultima espressione al coefficiente a_m rispettivamente $\rho_m \cos\varphi_m$, $\rho_m \operatorname{sen}\varphi_m$ e ρ_m. Inoltre, poniamo

$$S_n \equiv \sum_{m=p}^{q} \rho_m \cdot \lambda_m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}\lambda_m} = R_n \left(\frac{2e}{3n}\right)^{-n},$$

$$A_n \equiv \sum_{m=p}^{q-1}\left[(\cos\varphi_m - \cos\varphi_{m+1}) \cdot \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\frac{2}{3}\lambda_j}\right],$$

$$B_n \equiv \sum_{m=p}^{q-1}\left[(\operatorname{sen}\varphi_m - \operatorname{sen}\varphi_{m+1}) \cdot \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\frac{2}{3}\lambda_j}\right].$$

Applicando la trasformazione di ABEL si ha

$$O_n' = \cos\varphi_q \cdot R_n + \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot A_n, \tag{7}$$

$$O_n'' = \operatorname{sen}\varphi_q \cdot R_n + \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot B_n. \tag{8}$$

Da (7) e (8) segue:

$$|O_n|^2 = R_n^2\left[1 + \left(\frac{A_n}{S_n}\right)^2 + \left(\frac{B_n}{S_n}\right)^2 + 2\frac{A_n}{S_n}\cos\varphi_q + 2\frac{B_n}{S_n}\operatorname{sen}\varphi_q\right]. \tag{9}$$

In virtù della condizione 1) esiste un $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed un n_0 tale che, per ogni $n > n_0$,

$$\alpha_n < \frac{\varepsilon}{d_n},$$

e quindi

$$|\varphi_m - \varphi_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{d_n},$$

per ogni m compreso fra $p(n)$ e $q(n)$. Ne segue

$$|\cos\varphi_m - \cos\varphi_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{d_n}, \quad |\operatorname{sen}\varphi_m - \operatorname{sen}\varphi_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{d_n},$$

e quindi

$$|A_n| < \frac{\varepsilon}{d_n} \sum_{m=p}^{q-1} \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\frac{2}{3}\lambda_j} < \varepsilon S_n,$$

$$|B_n| < \varepsilon S_n.$$

Sostituendo in (9) si vede che esiste un numero $\gamma > 0$ tale che, per ogni $n > n_0$,

$$|O_n| > \gamma R_n.$$

Essendo $C' = 0$, pel teorema di LANDAU

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{R_n} = 1$$

ne segue

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|O_n|} = 1,$$

e cioè *il punto* $z = 0$ *è singolare per* f(z).

Merita di essere osservato che se esiste $\lim \sqrt[n]{R_n}$ (il quale sarà quindi $= 1$) senza alterare essenzialmente il ragionamento precedente si può sostituire alla condizione 1) quella meno restrittiva che sia

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} d_n \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Un caso semplice in cui esiste il $\lim \sqrt[n]{R_n}$ si ha quando *esiste un* σ *reale positivo, tale che l'espressione*

$$\sqrt[n]{\frac{|g^{(n)}(\sigma)|}{n!}}$$

abbia limite ordinario, per $n \to \infty$, *essendo* g(z) *la funzione analitica definita dalla serie* (6).

La proposizione dimostrata si presenta per molti rispetti come una generalizzazione del teorema di LECORNU-FABRY.