Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Piero Buzano

Un' estensione iperspaziale della rigata cubica di Cayley

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.4, p. 173–177.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_4_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1937.

PICCOLE NOTE

Un'estensione iperspaziale della rigata cubica di Cayley.

Nota di PIERO BUZANO (a Torino).

Sunto. - *Si determina una rigata di ordine n dello spazio a n dimensioni che ha come quasi-asintotiche* $\gamma_{1,n-1}$, ∞^{n-2} *curve razionali normali di* S_n *ed ammette* ∞^n *omografie in sè.*

È acquisito [1] che le rigate algebriche dello spazio ordinario aventi come asintotiche del secondo sistema infinite cubiche gobbe sono razionali e di ordine ≤ 6 e si possono pensare generate dalle rette osculanti di una cubica sghemba che si appoggiano ad una retta fissa. Nel caso particolare in cui questa retta è una tangente della cubica sghemba si ottiene la rigata del 3° ordine con retta doppia che è ad un tempo direttrice (semplice) e generatrice (semplice), cioè la rigata cubica di CAYLEY, la quale gode inoltre della nota proprietà di ammettere ∞^3 omografie in sè [2].

Estendendo agli iperspazi la generazione ora indicata per la rigata cubica di CAYLEY, io considero nello spazio S_n la rigata di ordine n, Γ_2^n, generata dalle rette osculanti di una C^n razionale normale che si appoggiano ad una sua tangente fissa. Risulterà subito che Γ_2^n è proiezione della rigata razionale normale di ordine n con direttrice rettilinea, fatta su uno S_n da un punto della V_3 luogo dei piani che congiungono le generatrici alla direttrice rettilinea. Farò vedere inoltre che, ad estensione di quanto avviene per $n=3$, le *quasi-asintotiche* $\gamma_{1,n-1}$ di Γ_2^n sono costituite

(1) Cfr. M. MANCINELLI, *Sulle rigate che hanno per asintotiche infinite cubiche gobbe.* « Annali di Matematica », tomo XXIX (1920).

(2) Astrazion fatta dal piano e dai coni, altre superficie di S_3 con ∞^3 o più omografie in sè sono la sviluppabile del 4° ordine circoscritta a una cubica sghemba (∞^3 omogr.) e le quadriche (∞^6 omogr.). Cfr. S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen,* vol. 3°, pp. 190-198.

da ∞^{n-2}, C^n razionali normali e che la rigata è mutata in sè da un gruppo ∞^n di omografie.

In un altro mio lavoro dimostrerò che la Γ_2^n costituisce, nel campo proiettivo, il *modello più generale* di rigate di ordine n di S_n con ∞^n omografie in sè e risulta quindi, anche sotto tale punto di vista, una naturale estensione della rigata cubica di CAYLEY.

***

Consideriamo in S_n la C^n razionale normale rappresentata in coordinate proiettive omogenee dalle equazioni:

$$x_0 = u^n, \quad x_1 = u^{n-1}, \ldots, \quad x_{n-1} = u, \quad x_n = 1, \tag{1}$$

e prefissiamo una sua tangente, che ci è lecito supporre sia la retta A_0A_1.

Vogliamo rappresentare la rigata Γ_2^n descritta dalle rette osculanti di C^n che si appoggiano ad A_0A_1: cioè dalle rette che congiungono ciascun punto di C^n all'intersezione del relativo iperpiano osculatore con la tangente fissa A_0A_1. Poichè l'iperpiano osculatore alla C^n in suo punto generico ha l'equazione:

$$x_0 - \binom{n}{1} u x_1 + \binom{n}{2} u^2 x_2 - \ldots + (-1)^n u^n x_n = 0,$$

la sua intersezione con A_0A_1 cade nel punto $(nu, 1, 0 \ldots 0)$ e quindi le equazioni della rigata Γ_2^n sono le seguenti (indicando con v un secondo parametro) ([3]):

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= u^n + nuv, \\ x_1 &= u^{n-1} + v, \\ x_2 &= u^{n-2}, \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= 1. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

La rigata Γ_2^n, che è evidentemente razionale, ha la retta A_0A_1 come direttrice semplice e anche come generatrice semplice (posizione limite di una generatrice quando il suo punto di appoggio su A_0A_1 tende ad A_0): la retta A_0A_1 è dunque *doppia* per la rigata e l'intersezione con un iperpiano passante per essa è costituita dalla A_0A_1 contata due volte e da altre $n-2$ generatrici, cosicchè la rigata è proprio di ordine n. Ne segue che Γ_2^n è proiezione della rigata razionale normale di ordine n con direttrice minima

([3]) Per $n = 4$ alle equazioni di tale rigata è pervenuta anche la dott.^{a} MARIA MORELLO nella sua dissertazione di laurea.

rettilinea. Il centro di proiezione, che sarà un punto di S_{n+1} non appartenente alla rigata normale, deve scegliersi in modo che da esso la direttrice rettilinea della rigata normale e una sua generatrice si proiettino entrambe nella retta A_0A_1 di Γ_2^n e quindi esso deve appartenere alla V_3 luogo dei piani che congiungono le generatrici della rigata normale alla sua direttrice rettilinea.

Determiniamo ora le quasi-asintotiche $\gamma_{1,n-1}$ della rigata Γ_2^n. Lo S_{n-1} osculatore a una quasi-asintotica di equazione $v=v(u)$ è individuato dai punti:

$$x; \quad \frac{dx}{du}=x_u+x_v\frac{dv}{du}; \dots \quad \frac{d^{n-1}x}{du^{n-1}};$$

mentre che il piano tangente alla rigata è individuato da x, x_u, x_v. Nei punti di una quasi-asintotica $\gamma_{1,n-1}$ deve avvenire che il piano tangente alla superficie giace interamente nello S_{n-1} osculatore alla linea, cioè i punti x, x_u, $\frac{d^2x}{du^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{du^{n-1}}$, x_v, stanno tutti in uno S_{n-1} il che si esprime immediatamente annullando il determinante delle loro coordinate. Tenuto conto delle (2) risulta che in tale determinante molti elementi sono nulli, cosicchè l'equazione che si ottiene annullandolo si riduce subito alla seguente:

$$\begin{vmatrix} n!\,u+n\dfrac{d^{n-1}(uv)}{du^{n-1}} & (n-1)!+\dfrac{d^{n-1}v}{du^{n-1}} \\ nu & 1 \end{vmatrix}=0,$$

la quale si riduce ulteriormente a: $\frac{d^{n-2}v}{du^{n-2}}=0$. Questa è dunque l'equazione differenziale delle quasi-asintotiche, il cui integrale generale è:

$$v=c_{n-3}u^{n-3}+c_{n-4}u^{n-4}+\dots+c_1u+c_0,$$

dove le c_i sono $n-2$ costanti arbitrarie. Sostituendo per v nelle (2) l'espressione ora trovata si ricava che *le quasi-asintotiche* $\gamma_{1,n-1}$ *sono* ∞^{n-2}, C^n *razionali normali aventi le seguenti equazioni:*

$$(3)\qquad \begin{cases} x_0=u^n+nc_{n-3}u^{n-2}+nc_{n-4}u^{n-3}+\dots+nc_1u^2+nc_0u, \\ x_1=u^{n-1}+c_{n-3}u^{n-3}+c_{n-4}u^{n-4}+\dots+c_1u+c_0, \\ x_2=u^{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n=1. \end{cases}$$

Queste C^n passano tutte per A_0 e vi ammettono la stessa tangente e gli stessi spazi osculatori della (1). Inoltre la corrispondenza che nasce fra la (1) e una qualsiasi delle (3), associando punti che provengono da *uno stesso* valore del parametro, è omografica e si rappresenta in S_n con le seguenti equazioni:

$$
(4)\quad \begin{cases} x_0' = x_0 + nc_{n-3}x_2 + nc_{n-4}x_3 + \dots + nc_1x_{n-2} + nc_0x_{n-1}, \\ x_1' = x_1 + c_{n-3}x_3 + c_{n-4}x_4 + \dots + c_1x_{n-1} + c_0x_n, \\ x_2' = x_2, \\ x_3' = x_3, \\ \dots\dots \\ x_n' = x_n. \end{cases}
$$

Si ottengono così ∞^{n-2} omografie che mutano la curva (1) nelle singole curve (3) cioè mutano quasi-asintotiche in quasi-asintotiche e la rigata Γ_2^n in sè.

Le (4) non esauriscono però il sistema delle omografie che mutano in sè la rigata Γ_2^n poichè nelle stesse condizioni si trovano pure le omografie che mutano in sè ciascuna quasi-asintotica lasciando inoltre fisso A_0: esse sono ben note poichè non sono altro che le ∞^2 omografie che mutano in sè la (1) lasciando fisso un suo punto.

Si ottengono così in complesso ∞^n omografie che mutano in sè Γ_2^n e si può vedere che non ce ne sono altre nel senso che ogni omografia la quale muti in sè Γ_2^n, o è un'omografia che muta in sè la (1) lasciando fisso A_0, o è un'omografia del sistema (4) oppure è prodotto di tali due omografie.

Consideriamo infatti un'omografia Ω che non muti in sè la (1), nè appartenga al sistema (4), ma tuttavia muti in sè la Γ_2^n: allora la Ω deve lasciar fissi il punto A_0, la retta A_0A_1 e tutti gli spazi $(A_0A_1A_2) \dots (A_0A_1 \dots A_{n-1})$ osculatori comuni alle quasi-asintotiche in A_0, quindi Ω si rappresenta con una sostituzione lineare nella cui matrice i termini a sinistra della diagonale principale sono tutti nulli. Inoltre la Ω, mutando Γ_2^n in sè e quindi quasi-asintotiche in quasi-asintotiche, muterà la (1) in una delle curve (3) con l'avvertenza che punti corrispondenti saranno dati da *due diversi* valori del parametro [4] u e u' legati da una sostituzione lineare: e poichè A_0 deve rimanere fisso la sostituzione sarà intera, cioè $u' = au + b$. Ora esiste certo un'omografia Ω' che muta la (1) in sè, lasciando fisso A_0 e operando sul parametro u proprio la sostituzione $u' = au + b$: pertanto Ω può considerarsi come prodotto di Ω' e di un'altra omografia Ω'' la quale muta la (1) in (3) facendo corrispondere questa volta punti provenienti da *uno stesso*

[4] Altrimenti, ragionando per Ω come più avanti per Ω'', si vedrebbe che Ω apparterrebbe già essa al sistema (4).

valore del parametro, il che implica senz'altro che la sostituzione lineare rappresentante Ω'', nella cui matrice, come già per Ω, i termini a sinistra della diagonale principale sono tutti nulli, si riduca ulteriormente al tipo (4). Resta così dimostrato che Ω è prodotto di due omografie dei tipi indicati.

Si conclude che *la rigata* Γ_2^n *ammette un gruppo di* ∞^n *omografie in sè* (e non più ampio). In un altro mio lavoro metterò in relazione tale gruppo di omografie con quello già noto che muta in sè la rigata normale [5] di cui Γ_2^n è proiezione e farò vedere che Γ_2^n è il modello più generale delle rigate di ordine n di S_n con ∞^n omografie in sè.

[5] Cfr. *Encyklopädie der Math. Wiss.*, III, C, 7, pag. 910; (C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*).