Odoardo Franceschi

# Su di una particolare classe di curve sghembe

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **16** (1937), n.3, p. 149–154.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_3_149_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1937.

## Su di una particolare classe di curve sghembe.

Nota di ODOARDO FRANCESCHI (a Parma).

**Sunto.** - *L'A., partendo dalla nozione di corrispondenza di tipo dualistico fra due spazî, indotta da una ipersuperficie, si propone la ricerca di particolari curve sghembe, dipendenti da una coppia di proiettività assegnate su due rette dello spazio.*

Il prof. A. TERRACINI, in una sua Nota [1], ha avuto occasione di considerare una superficie in relazione con la corrispondenza di tipo dualistico che nasce su di un piano sul quale la si proietti da un punto generico e col quale si intersechino i suoi piani tan-

[1] A. TERRACINI, *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre* (« Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. 71, 1935-36-XIV).

genti. È possibile inversamente, sotto un'opportuna condizione, prefissare la corrispondenza di tipo dualistico in modo da assicurare l'esistenza della superficie in un $S_3$ (¹).

Com'è evidente, si può sempre considerare una corrispondenza analoga in relazione ad una varietà immersa in un iperspazio. In particolare, data un'ordinaria curva sghemba $C$, ed una retta generica $r$, potrà studiarsi la corrispondenza che risulta quando si proietti la $C$ su $r$, da una seconda retta prefissata $s$, e si seghi la $r$ coi piani osculatori a $C$ nei suoi punti. In tal caso anzi, prefissate le rette $r$, $s$ e la corrispondenza (puntuale) su $r$, la $C$ risulta determinata a meno di una funzione arbitraria. Dal punto di vista della Geometria differenziale proiettiva, come mi ha segnalato il prof. TERRACINI, acquista particolare interesse il problema: « *Assegnata ad arbitrio una proiettività su una delle rette* **r**, **s**, *esistono curve* C *della classe indicata, le quali conservino il loro comportamento, quando si scambino fra loro le rette* **r** *ed* **s**? ».

Tale ricerca forma l'oggetto della presente Nota.

Alla domanda che precede si risponde in modo affermativo, e si riconosce che le curve cercate sono curve $W$ appartenenti alle classi [1111], [211], [22] di SCHUBARTH (²).

Mi propongo di studiare a parte in altro lavoro le curve più generali per le quali le rette $r$, $s$ non si presentano in relazione simmetrica.

**1.** Indichino $x$, $y$, $z$, coordinate proiettive non omogenee $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ dei punti dell'ordinario spazio, riferiti ad un tetraedro fondamentale avente gli spigoli $A_1A_4$, $A_2A_3$, coincidenti rispettivamente con le rette $r$, $s$, e sia $y = y(x)$, $z = z(x)$ una curva sghemba che supporremo analitica. Si proietti il punto generico di tale curva dallo spigolo $A_2A_3$ del tetraedro di riferimento sullo spigolo $A_1A_4$, e si intersechi quest'ultimo col piano osculatore alla curva nello stesso punto; le coordinate sulla retta $x_2 = x_3 = 0$ dei due punti così ottenuti, sono rispettivamente:

$$x, \quad x + \frac{yz'' - y''z}{y''z' - y'z''}, \tag{1}$$

gli apici denotando derivate rispetto ad $x$.

(¹) Cfr. A. TERRACINI, *Invariante di Mehmke-Segre generalizzato e applicazione alle congruenze di rette* (« Boll. dell'Unione Matem. Italiana », anno XV, n. 3, giugno 1936).

(²) Cfr. EMIL SCHUBARTH, *Bestimmung der W-Kurven. Inaugural Dissertation.* Basel, Buchdruckerei Emil. Birkhäuser & C., 1927).

Si proietti ora il punto generico della curva dallo spigolo $A_1A_4$ sullo spigolo $A_2A_3$, e si intersechi quest'ultimo col piano osculatore alla curva nel medesimo punto; le coordinate, sulla retta $x_1 = x_4 = 0$, dei due punti ottenuti sono rispettivamente:

$$\frac{y}{z}, \quad \frac{y''}{z''}. \tag{2}$$

In ordine alla condizione posta, deve intercedere una relazione bilineare tanto fra le (1) quanto fra le (2). Allo scopo di semplificare i calcoli, tratterò separatamente i casi relativi ai due tipi di proiettività. Poichè rimane ancora arbitraria la posizione dei vertici del tetraedro di riferimento sulle rette $A_1A_4$, $A_2A_3$, collocherò gli stessi vertici nei punti uniti della proiettività, se questa sarà iperbolica, e fisserò il vertice appartenente alla faccia $x_4 = 0$ nell'unico punto unito, se la proiettività sarà parabolica. Ove $\xi$, $\eta$ denotino i valori dei parametri relativi a due elementi corrispondenti, le relazioni delle proiettività assumeranno rispettivamente le forme:

$$\eta = k\xi, \quad \eta = \xi + k,$$

$k$ denotando una costante.

Avverto subito che non farò distinzione fra elementi reali ed immaginari.

Distinguerò i tre casi:

1°) le due proiettività definite, l'una sulla retta $x_2 = x_3 = 0$, l'altra sulla retta $x_1 = x_4 = 0$, siano entrambe iperboliche;

2°) una (quella definita sulla retta $x_2 = x_3 = 0$) sia parabolica, l'altra iperbolica;

3°) le due proiettività siano entrambe paraboliche.

Esaminerò dapprima i casi generali e mi occuperò poi dei casi eccezionali.

**2.** Tratto il 1° caso. La determinazione della curva dipende dal sistema di equazioni differenziali:

$$x + \frac{yz'' - y''z}{y''z' - y'z''} = hx, \quad \frac{y''}{z''} = k\frac{y}{z}, \tag{3}$$

che può scriversi:

$$(h-1)xy''z' - [(1-k)y + (h-1)xy']z'' = 0, \quad y''z - kyz'' = 0, \tag{4}$$

con $h$, $k$ costanti arbitrarie non nulle, differenti tra loro e dall'unità.

Poichè in generale è $y''z'' \neq 0$, dalle (4) si traggono le equazioni:

$$(1-k)y + (h-1)xy' = k\lambda y, \quad (h-1)xz' = \lambda z,$$

con $\lambda$ funzione di $x$ da determinarsi tenuto conto delle (4). Dalle due precedenti si ottengono le

(5) $$y = A \cdot x^{\frac{1-k}{1-h}} \cdot e^{\frac{k}{h-1}\int \frac{\lambda}{x} dx}, \quad z = B \cdot e^{-\frac{1}{1-h}\int \frac{\lambda}{x} dx},$$

con $A$, $B$, costanti arbitrarie. Avuto riguardo alla $2^a$ delle (4), si ottiene per $\lambda$ la relazione:

(6) $$k\lambda^2 + 2k\lambda - (h-k) = 0, \quad \text{donde} \quad \lambda = \frac{-k \pm \sqrt{hk}}{k}.$$

Dalle (5) si ha perciò:

(7) $$y = A \cdot x^{\frac{1-(\lambda+1)k}{1-h}}, \quad z = B \cdot x^{-\frac{\lambda}{1-h}},$$

e quindi risulta *una curva* W *della classe* [1111] *di* SCHUBARTH, *del tipo più generale.*

Mediante un'omografia si può rendere $A = B = 1$, posto

$$\alpha = \frac{1-(\lambda+1)k}{1-h} = \frac{1 \mp \sqrt{hk}}{1-h}, \quad \beta = -\frac{\lambda}{1-h} = \frac{k \mp \sqrt{hk}}{k(1-h)},$$

la curva (7) assume la forma:

(7') $$y = x^\alpha, \quad z = x^\beta.$$

Assegnati in (7') valori arbitrarî per $\alpha$, $\beta$, e sostituiti i corrispondenti valori di $y$, $z$ nelle (3), si ottiene:

$$h = 1 + \frac{\beta(\beta-1) - \alpha(\alpha-1)}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}, \quad k = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta(\beta-1)}.$$

**3.** Nel 2° caso la determinazione della curva dipende dal sistema:

(8) $$\frac{yz'' - y''z}{y''z' - y'z''} = h, \quad \frac{y''}{z''} = k\frac{y}{z},$$

che può scriversi:

(9) $$y''(z + hz') - (y + hy')z'' = 0, \quad y''z - kyz'' = 0,$$

con $h$, $k$ costanti arbitrarie non nulle.

Per $y''z'' \neq 0$, si traggono dalle (9):

$$y + hy' = k\mu y, \quad z + hz' = \mu z,$$

con $\mu$ funzione di $x$ da determinarsi, avuto riguardo alle (9). Dalle due precedenti si ottengono le

(10) $$y = C \cdot e^{\frac{1}{h}\int (k\mu - 1) dx}, \quad z = D \cdot e^{\frac{1}{h}\int (\mu - 1) dx},$$

con $C$, $D$ cost. arbitrarie. Per la $2^a$ delle (9), si ottiene $k\mu^2 = 1$, donde $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$, da cui, per le (10), si ha:

$$y = C \cdot e^{\frac{k\mu-1}{h}x}, \quad z = D \cdot e^{\frac{\mu-1}{h}x}, \tag{11}$$

curva che mediante un'omografia si riduce alla forma:

$$y = e^{\alpha x}, \quad z = e^{x}, \tag{11'}$$

e quindi si ottiene *una curva* W *della classe* [211] *di* SCHUBARTH *del tipo più generale.* Infatti, assegnati in (11') valori arbitrarî per $\alpha$, $\beta$, e sostituiti i corrispondenti valori di $y$, $z$ nelle (8), si ottiene:

$$h = -\frac{1+\alpha}{\alpha}, \quad k = \alpha^2.$$

**4.** Nel 3° caso deve studiarsi il sistema:

$$\frac{yz'' - y''z}{y''z' - y'z''} = h, \quad \frac{y''}{z''} = \frac{y}{z} + k,$$

ossia:

$$y''(z + hz') - (y + hy')z'' = 0, \quad y''z - (y + kz)z'' = 0, \tag{12}$$

con $h$, $k$ cost. arbitrarie non nulle.

Dalle (12), per $y''z'' \neq 0$, si traggono le:

$$z + hz' = \nu z, \quad y + hy' = \nu(y + kz),$$

con $\nu$ funzione di $x$ da determinarsi, tenuto conto delle (12). Si ottengono allora:

$$y = \frac{ak}{h} \cdot e^{\frac{1}{h}\int(\nu-1)dx} \cdot \left(\int \nu dx + b\right), \quad z = a \cdot e^{\frac{1}{h}\int(\nu-1)dx}, \tag{13}$$

con $a$, $b$ cost. arbitrarie.

Posto mente alla $2^a$ delle (12), si ottiene

$$\nu^2 - 1 = 0, \quad \text{donde} \quad \nu = \pm 1.$$

Per $\nu = 1$ le (13) dànno una retta, per $\nu = -1$, la curva:

$$y = L \cdot e^{-\frac{2x}{h}} \cdot (x + b), \quad z = M \cdot e^{-\frac{2x}{h}}, \tag{14}$$

con $L$, $M$ cost. arbitrarie, che, trasformata omograficamente, si riduce al tipo:

$$y = xe^x, \quad z = e^x,$$

che caratterizza la *classe* [22] *di* SCHUBARTH.

Da quanto precede risulta che:

*Tra le soluzioni del problema non si presentano curve* W *del tipo* [31] *di* SCHUBARTH.

5. In ciò che segue si esaminano i casi particolari non compresi nella trattazione generale.

1° Caso. — Se una delle costanti $h$, $k$ è nulla, la corrispondente proiettività è degenere, e non esiste pertanto alcuna curva sghemba che risolva il problema.

Se $h = 1$, $k \neq 1$, le (4) dànno rispettivamente:

$$yz'' = 0, \quad y''z = 0;$$

per $y = 0$, si ha una curva piana arbitraria giacente nel piano $y = 0$, per $z'' = 0$, $y'' = 0$, una retta, per $z'' = 0$, $z = 0$, una curva piana arbitraria giacente nel piano $z = 0$. Il caso $h \neq 1$, $k = 1$ non differisce dal precedente che per lo scambio delle rette $r$, $s$. Se $h = k = 1$, il sistema si riduce all'equazione $y''z - yz'' = 0$, e si ha una curva appartenente ad un complesso lineare.

Se $h = k \neq (0; 1)$, la (6) dà $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, da cui $\lambda = 0$, oppure $\lambda = -2$. Il 1° caso non presenta interesse; il 2°, avuto riguardo alle (7), dà luogo alla curva:

$$y = A_1 \cdot x^{\frac{1+k}{1-k}}, \quad z = B_1 \cdot x^{\frac{2}{1-k}}.$$

2° Caso. — Se $k = 0$, la 2ª proiettività (quella assegnata sulla retta $s$) è degenere, e il problema non ammette soluzioni. Se $h = 0$, $k \neq 0$, dalle (9) si trae $k = 1$, e le due proiettività sono identiche; in tal caso la curva appartiene ad un complesso lineare.

3° Caso. — Se $h = 0$, $k \neq 0$, la proiettività fissata sulla retta $r$ si riduce all'identità, e le (12) dànno:

$$y''z - yz'' = 0, \quad zz'' = 0.$$

Per $z = 0$ si ha una curva piana arbitraria appartenente al piano $z = 0$; per $z'' = 0$ si ha una retta, oppure ancora una curva arbitraria del piano $z = 0$.

Se $h \neq 0$, $k = 0$, la proiettività esistente sulla retta $s$ è identica, e le (12) dànno:

$$y''z' - y'z'' = 0, \quad y''z - yz'' = 0;$$

come subito si vede, si ottiene una retta, o una curva arbitraria giacente in uno dei piani $y = 0$, $z = 0$, oppure una curva del piano $y - z = 0$, che, a meno di un'omografia, è rappresentata da $y = z = e^{\int \rho dx}$, con $\rho$ funzione arbitraria di $x$.

Se $h = k = 0$, le due proiettività sono identiche, e la curva appartiene ad un complesso lineare.