BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

LETTERIO TOSCANO

Sulla somma di alcune serie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.3, p. 144–149.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_3_144_0>

Sulla somma di alcune serie.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *L'Autore introduce una nuova classe di polinomi e con essi esprime certi operatori differenziali e la somma di alcune serie.*

1. In due miei precedenti lavori [1] mi sono occupato fra altro della somma delle serie integro-geometriche, cioè delle serie della forma

$$p(0)+p(1)\cdot x+p(2)\cdot x^2+\ldots+p(n)\cdot x^n+\ldots$$

con $|x|<1$ e $p(n)$ polinomio di grado r.

Ho trovato

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} p(n)\cdot x^n=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\sum_{s=0}^{s=r} M_{rs}x^{r-s}$$

[1] L. TOSCANO, *Sulla somma di alcune serie numeriche* (« The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 38, 1933); *Una trasformazione di Pincherle e somma di alcune serie numeriche* (« Anais da Faculdade de Ciências do Porto », tomo XXII).

con

$$M_{rs} = \binom{s}{s} L_{r,\,r-s} - \binom{s+1}{s} L_{r,\,r-s-1} + \ldots + (-1)^{r-s}\binom{r}{s} L_{r0}$$

$$(s = 0,\ 1, \ldots,\ r)$$

e

$$J_{r\nu} = \Delta^{\nu} p(0);$$

ed in particolare, nel caso $p(n) = n^r$,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n^r x^n = \frac{x}{(1-x)^{r+1}} \sum_{s=1}^{s=r} A_{rs} x^{r-s},$$

dove i coefficienti A_{rs} risultano definiti dalle posizioni

$$A_{r1} = 1, \quad A_{rr} = 1$$

$$A_{rs} = sA_{r-1,\,s} + (r - s + 1)A_{r-1,\,s-1}.$$

In altro mio lavoro [1] ho fatto inoltre vedere che questi coefficienti, oltre che per la somma delle precedenti serie, si prestano con successo per il calcolo dei numeri di BERNOULLI e dei coefficienti dello sviluppo in serie di $\operatorname{tg} x$; e qui infine mi propongo di mostrare come intervengono pure in un certo sviluppo della iterata di xD (con D simbolo di derivazione rispetto a x), come si possono pure generalizzare per lo sviluppo di $x^{-r(u-1)}(x^u D)^r$, $(Dx^u)^r x^{-r(u-1)}$, $x^{-r(u-1)}(Dx^u)^r$, $(x^u D)^r x^{-r(u-1)}$, e in conseguenza come tali coefficienti semplici e generalizzati sono legati al calcolo di particolari serie, dal cui confronto ne trarrò conseguenze per gli operatori considerati.

2. I numeri A_{rs} si possono generalizzare in vari modi e qui li generalizzo con i polinomi $A_{rs}^{(u)}$, $B_{rs}^{(u)}$ (u intero qualsiasi) definiti dalle posizioni

$$(1)\quad \begin{cases} A_{r1}^{(u)} = (-1)^{r-1}[(u-1)-1][2(u-1)-1]\ldots[(r-1)(u-1)-1] \\ A_{rr}^{(u)} = [(u-1)+1][2(u-1)+1]\ldots[(r-1)(u-1)+1] \\ A_{rs}^{(u)} = [(r-1)u - s + 2]A_{r-1,\,s-1}^{(u)} - [(r-1)(u-1) - s]A_{r-1,\,s}^{(u)} \\ A_{rs}^{(u)} = 0 \quad \text{per} \quad s < 1 \quad \text{e} \quad s > r \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} B_{r1}^{(u)} = [(u-1)+1][2(u-1)+1]\ldots[(r-1)(u-1)+1] \\ B_{rr}^{(u)} = (-1)^{r-1}(r-1)!\,(u-1)^{r-1} \\ B_{rs}^{(u)} = [(r-1)(-u+2) - s + 1]B_{r-1,\,s-1}^{(u)} + [(r-1)(u-1) + s]B_{r-1,\,s}^{(u)} \\ B_{rs}^{(u)} = 0 \quad \text{per} \quad s < 1 \quad \text{e} \quad s > r. \end{cases}$$

[1] L. TOSCANO, *Sui coefficienti della tangente e sui numeri di Bernoulli* (« Boll. Unione Matem. Italiana », anno XV, 1936).

Per $u=1$ tali polinomi si riducono ai numeri semplici

$$A_{rs}^{(1)}=A_{rs}, \qquad B_{rs}^{(1)}=A_{r-1,s},$$

e per $u=2$ assumono i valori notevoli

$$A_{rs}^{(2)} \begin{cases} =0 \\ =r! \end{cases} \quad \text{per} \quad s \begin{cases} <r \\ =r, \end{cases}$$

$$B_{rs}^{(2)}=(-1)^{s+1}(r-1)!\binom{r}{s}.$$

Con tali polinomi $A_{rs}^{(u)}$, $B_{rs}^{(u)}$ è possibile assegnare nuovi e notevoli sviluppi per gli operatori $x^{-r(u-1)}(x^uD)^r$, $(Dx^u)^r x^{-r(u-1)}$, $x^{-r(u-1)}(Dx^u)^r$, $(x^uD)^r x^{-r(u-1)}$.

Infatti valgono le relazioni [1]

$$r!\,x^{-r(u-1)}(x^uD)^r=\sum_{s=1}^{s=r} A_{rs}^{(u)}x^{r-s+1}D^r x^{s-1} \tag{3}$$

$$r!\,(Dx^u)^r x^{-r(u-1)}=\sum_{s=1}^{s=r} A_{rs}^{(u)}x^{s-1}D^r x^{r-s+1} \tag{4}$$

$$r!\,x^{-r(u-1)}(Dx^u)^r=\sum_{s=0}^{s=r} B_{r+1,\,s+1}^{(u)}x^s D^r x^{r-s} \tag{5}$$

$$r!\,(x^uD)^r x^{-r(u-1)}=\sum_{s=0}^{s=r} B_{r+1,\,s+1}^{(u)}x^{r-s}D^r x^s. \tag{6}$$

Altrettante se ne possono dedurre per le formule di permutabilità

$$\begin{aligned} (D^ix^i)(D^jx^j)&=(D^jx^j)(D^ix^i) \\ (x^iD^i)(x^jD^j)&=(x^jD^j)(x^iD^i) \\ (D^ix^i)(x^jD^j)&=(x^jD^j)(D^ix^i), \end{aligned} \tag{7}$$

ed altre ancora per le formule di trasformazione

$$\begin{aligned} (Dx^u)^r x^{-r(u-1)}&=D^{-r(u-1)}(D^ux)^r \\ x^{-r(u-1)}(x^uD)^r&=(xD^u)^r D^{-r(u-1)} \\ x^{-r(u-1)}(Dx^u)^r&=(D^ux)^r D^{-r(u-1)} \\ (x^uD)^r x^{-r(u-1)}&=D^{-r(u-1)}(xD^u)^r. \end{aligned} \tag{8}$$

Per $u=1$ e $u=2$ le relazioni precedenti assumono forma particolare notevole.

Pertanto i coefficienti semplici A_{rs} e generalizzati $A_{rs}^{(u)}$, $B_{rs}^{(u)}$ intervengono in certi sviluppi di $(xD)^r$, $(Dx)^r$, $x^{-r(u-1)}(x^uD)^r$, $(Dx^u)^r x^{-r(u-1)}$,

[1] Ometto di proposito la dimostrazione delle relazioni contenute in questo paragrafo, in quanto intendo riprenderle con maggiore generalità in un prossimo lavoro su gli operatori lineari associati.

$x^{-r(u-1)}(Dx^u)^r$, $(x^u D)^r x^{-r(u-1)}$; e nel paragrafo seguente vedremo come si collegano al calcolo della somma di alcune serie.

3. Siano

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n, \quad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} k_n x^n,$$

due funzioni analitiche a raggio di convergenza diverso da zero: vale la trasformazione di PINCHERLE [1]

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Delta^\nu a_0}{\nu\,!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x) \tag{9}$$

in cui la serie a secondo membro converge se

$$\frac{|x|}{|x-v|} < \frac{|u|}{|1-u|},$$

denotando con u e v i punti singolari di $f(x)$ e $\varphi(x)$.

Per $a_n = p(n)$ si ha

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} p(n)\cdot k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu p(0)}{\nu\,!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x).$$

E nei casi

$$\begin{aligned} p(n) &= n^{(u-1,\,r)} \\ p(n) &= (n+1)^{(-u+1,\,r)} \\ p(n) &= (n+u)^{(u-1,\,r)} \\ p(n) &= (n-u+1)^{(-u+1,\,r)} \end{aligned} \tag{10}$$

si ricavano i risultati particolari

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n=\infty} n^{(u-1,\,r)} k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu 0^{(u-1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu \varphi^\nu(x) \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1)^{(-u+1,\,r)} k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu 1^{(-u+1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x) \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} (n+u)^{(u-1,\,r)} k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu u^{(-u+1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x) \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} (n-u+1)^{(-u+1,\,r)} k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu(-u+1)^{(-u+1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x). \end{aligned} \tag{11}$$

[1] S. PINCHERLE, *A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard* (« Rend. R. Acc. delle Scienze di Bologna », 1899); *Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica* (« Annali di Matematica », 1900); *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* (Bologna, 1901).

Ma da mie precedenti ricerche [1] si ha

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu 0^{(u-1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu D^\nu = x^{-r(u-1)}(x^u D)^r \\
&\sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu 1^{(-u+1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu D^\nu = (D x^u)^r x^{-r(u-1)} \\
&\sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu u^{(u-1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu D^\nu = x^{-r(u-1)}(D x^u)^r \\
&\sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{\Delta^\nu (-u+1)^{(-u+1,\,r)}}{\nu\,!} x^\nu D^\nu = (x^u D)^r x^{-r(u-1)},
\end{aligned}
$$

ed allora per le (3), (4), (5), (6) seguono le formule

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{n=\infty} n^{(u-1,\,r)} k_n x^n = \frac{1}{r\,!}\sum_{s=1}^{s=r} A_{rs}^{(u)} x^{r-s+1} D^r x^{s-1}\varphi(x) \\
&\sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1)^{(-u+1,\,r)} k_n x^n = \frac{1}{r\,!}\sum_{s=1}^{s=r} A_{rs}^{(u)} x^{s-1} D^r x^{r-s+1}\varphi(x) \\
&\sum_{n=0}^{n=\infty} (n+u)^{(u-1,\,r)} k_n x^n = \frac{1}{r\,!}\sum_{s=0}^{s=r} B_{r+1,\,s+1}^{(u)} x^s D^r x^{r-s}\varphi(x) \\
&\sum_{n=0}^{n=\infty} (n-u+1)^{(-u+1,\,r)} k_n x^n = \frac{1}{r\,!}\sum_{s=0}^{s=r} B_{r+1,\,s+1}^{(u)} x^{r-s} D^r x^s\varphi(x).
\end{aligned}
$$

Queste nuove formule sono molto più interessanti delle (11) in quanto qui l'operatore D è a indice costante.

Infatti nel caso $k_n = 1$, $|x| < 1$, si ha subito

$$
x^{r-i} D^r x^i \varphi(x) = x^{r-i} D^r \frac{x^i}{1-x} = x^{r-i} D^r \left[-\frac{x^i - 1}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right] =
$$

$$
= x^{r-i} D^r \frac{1}{1-x} = \frac{r\,!\, x^{r-i}}{(1-x)^{r+1}}
$$

e ne seguono i risultati particolari

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{n=\infty} n^{(u-1,\,r)} x^n = \frac{x}{(1-x)^{r+1}} \sum_{s=1}^{s=r} A_{rs}^{(u)} x^{r-s} \\
&\sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1)^{(-u+1,\,r)} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \sum_{s=1}^{s=r} A_{rs}^{(u)} x^{s-1}
\end{aligned}
$$

[1] L. TOSCANO, *Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati* (« Annali di Matematica », serie IV, tomo XIV, 1935-36).

$$(14)\quad \begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+u)^{(u-1,\,r)}x^n=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\sum_{s=0}^{s=r}B^{(u)}_{r+1,\,s+1}x^s\\ &\sum_{n=0}^{n=\infty}(n-u+1)^{(-u+1,\,r)}x^n=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\sum_{s=0}^{s=r}B^{(u)}_{r+1,\,s+1}x^{r-s}. \end{aligned}$$

4. Dal confronto delle ultime quattro formule precedenti è possibile dedurre due relazioni sui polinomi $A^{(u)}_{rs}$, $B^{(u)}_{rs}$, e per mezzo di esse assegnare nuove formule su gli operatori considerati in questa Nota. Infatti:

Dalle prime due formule si deduce facilmente

$$(15)\qquad A^{(-u+2)}_{r,\,r-s+1}=A^{(u)}_{rs}.$$

Dalle ultime due risulta

$$\sum_{s=0}^{s=r}B^{(-u+2)}_{r+1,\,s+1}x^{s+1}=\sum_{s=0}^{s=r}B^{(u)}_{r+1,\,s+1}x^{r-s}-r!\,(-u+1)^r(1-x)^{r+1}$$

e da questa segue

$$(16)\qquad B^{(-u+2)}_{r+1,\,r-s+1}-B^{(u)}_{r+1,\,s}=(-1)^s r!\,(u-1)^r\binom{r+1}{s},$$

che, insieme alla precedente, per $u=1$ si riducono alla ben nota relazione $A_{r,\,r-s+1}=A_{r,\,s}$.

Infine dalle relazioni (3), (4), (5), (6), per le (15) e (16) seguono le formule importanti

$$x^{-r(u-1)}(x^uD)^r x=x(Dx^{-u+2})^r x^{r(u-1)}$$
$$x^{r(u-1)}(Dx^{-u+2})^r D=D(x^uD)^r x^{-r(u-1)}.$$