Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Basilio Manià

Un'applicazione della trasformazione di Fourier alle funzioni quasi analitiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.3, p. 136–144.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_3_136_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Un'applicazione della trasformazione di Fourier alle funzioni quasi analitiche (*).

Nota di BASILIO MANIÀ (a Pisa).

Sunto. - *Si stabiliscono, per mezzo della trasformazione di* FOURIER, *delle condizioni necessarie e sufficienti per la quasi analiticità delle funzioni indefinitamente derivabili sopra l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *e se ne ricava un risultato relativo alla chiusura del sistema di funzioni* $\{t^n\}$ *sopra lo stesso intervallo.*

1. In una Nota in corso di pubblicazione nei « Rendiconti dell'Istituto Lombardo » (1) ho stabilito delle condizioni necessarie e sufficienti per la quasi analiticità delle funzioni indefinitamente derivabili periodiche: condizioni espresse mediante certe disuguaglianze che debbono essere soddisfatte dai coefficienti di EULERO-FOURIER delle funzioni stesse. Qui, abbandonando l'ipotesi della periodicità, mi propongo di stabilire delle condizioni necessarie e sufficienti per la quasi analiticità delle funzioni $F(x)$ indefinitamente derivabili e a quadrato sommabile sopra l'intervallo $(-\infty, +\infty)$: condizioni che saranno espresse per mezzo della trasformata di FOURIER

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx$$

della funzione $F(x)$ considerata.

A tal fine nei due numeri successivi dimostro due teoremi da cui nel n.° 4 sono dedotte le condizioni per la quasi analiticità delle funzioni $F(x)$: dai teoremi stessi si può ricavare un risultato relativo alla chiusura del sistema di funzioni $\{t^n\}$ sopra l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, e ciò è indicato nel n.° 5. Infine nel n.° 6 è indicata una condizione necessaria e sufficiente per la quasi analiticità di una particolare classe di funzioni indefinitamente derivabili sopra l'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) *Condizioni per la quasi analiticità delle funzioni periodiche.* Vedi anche: DE LA VALLÉE POUSSIN, *On the approximation of functions of a real variable and on quasi analytic functions.* « The Rice Institute Pamphlet », Vol. XII (1925): S. MANDELBROJT, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions.* Paris, Gauthier-Villars (1935).

2. Teorema I. — *Sia* $\psi(t)$ *una funzione monotona non decrescente sopra l'intervallo* $(0, +\infty)$, *assolutamente continua sopra ogni parte finita di esso; detta* $\omega(t)$ *la massima minorante non decrescente di* $t\psi'(t)$, *l'integrale*

$$(1) \qquad \int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt$$

diverga; allora se $f(t)$ *è una qualunque funzione misurabile sopra l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *per la quale sia sempre*

$$|f(t)| < Ae^{-\psi(t)}$$

con A *costante, ed esistano finiti gli integrali*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)t^n|\,dt, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

la funzione

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt$$

è quasi analitica sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

È $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t\psi'(t) = +\infty$, e quindi da un certo valore t_0 in poi è $\psi'(t) > \dfrac{d}{dt}\log t^4$. Ne viene che è sempre $\psi(t) > c + \log t^4$, $e^{-\frac{\psi(t)}{2}} < c_1 t^{-2}$ con c e c_1 costanti, e l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\psi(|t|)}{2}}\,dt$$

esiste finito.

Premesso questo e osservato che

$$F^{(n)}(x) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^n e^{ixt}dt,$$

si ha

$$|F^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)t^n|\,dt \leq \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi(|t|)}t^n dt \leq$$

$$\leq \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\psi(|t|)}{2}}\,dt \cdot \max_{0\leq t<+\infty} e^{-\frac{\psi(t)}{2}}\,t^n.$$

Il massimo qui scritto esiste perchè la derivata di $e^{-\frac{\psi(t)}{2}} t^n$ ha lo stesso segno di

$$2n - t\psi'(t)$$

e quindi è negativa o nulla quanto $2n - \omega(t) \leq 0$. Perciò, detta $\varphi(n)$ la funzione inversa di $\omega(t)$, il massimo sopra indicato sarà ottenuto per un valore di $t \leq \varphi(2n)$. Ne segue

$$|F^{(n)}(x)| \leq B(\varphi(2n))^n,$$

con B costante opportuna, e, per il teorema fondamentale di DENJOY–CARLEMAN la quasi analiticità di $F(x)$ sarà dimostrata quando sia provato che l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{dn}{\varphi(2n)},$$

o, ciò che è lo stesso, che l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{dn}{\varphi(n)}$$

diverge. Ma ciò è una conseguenza del fatto che diverge l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt.$$

OSSERVAZIONE I. — *La condizione relativa a $\psi(t)$ è soddisfatta se è $t\psi'(t) > \alpha\psi(t)$ con $\alpha > 0$ e se l'integrale*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt \tag{2}$$

diverge [2].

Infatti in questo caso $\omega(t) \geq \alpha\psi(t)$.

OSSERVAZIONE II. — *La condizione relativa a $\psi(t)$ è anche soddisfatta se $t\psi'(t)$ è monotona non decrescente e se l'integrale* (1) *diverge.*

In questo caso è $\omega(t) = t\psi'(t)$ e dalla uguaglianza

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = \frac{\psi(t')}{t'} - \frac{\psi(t'')}{t''} + \int_{t'}^{t''} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt, \qquad (0 < t' < t'' < +\infty),$$

segue la divergenza dell'integrale (1).

(2) Vedi S. TAKENAKA, *On a class of quasi analytic functions and the closure of* $|t^n|$ *on* $(-\infty, +\infty)$. « Proc. phys.-math. Soc. Japan », Vol. 17 (1935), pp. 219-223.

3. Teorema II. — *Sia* $\psi(t)$ *una funzione monotona non decrescente sopra l'intervallo* $(0, +\infty)$, *assolutamente continua in ogni parte limitata di esso; sia* $\lim_{t \to +\infty} t\psi'(t) = +\infty$ *e l'integrale*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt$$

converga; allora esiste una funzione $f(t)$ *continua sopra l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *per la quale è sempre*

$$|f(t)| < Ae^{-\psi(|t|)},$$

con A *costante, gli integrali*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)t^n|\, dt, \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

esistono finiti, e la funzione

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\, dt,$$

indefinitamente derivabile su tutto l'asse reale, non è quasi analitica.

Posto $\bar{\psi}(t) = \psi(et)$, l'integrale

$$\int^\infty \frac{\bar{\psi}(t)}{t^2}\, dt$$

converge e quindi converge anche l'integrale

$$\int^\infty \frac{dn}{\varphi(n)}$$

dove $\varphi(n)$ è la funzione inversa di $\bar{\psi}(t)$. Allora dal teorema fondamentale di Denjoy e Carleman e da un'osservazione di De La Vallée Poussin segue che esiste una funzione $G(x)$ indefinitamente derivabile sopra l'intervallo $(0, 1)$, ivi non identicamente nulla, e tale che

$$G^{(n)}(0) = 0, \quad G^{(n)}(1) = 0, \quad |G^{(n)}(x)| \leq \varphi(n)^n$$

per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Posto $F(x) = G(x)$ in $(0, 1)$ e $F(x) = 0$ per gli altri valori reali di x, consideriamo la trasformata di Fourier di $F(x)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ixt}\, dx.$$

Si ha

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|t|^n} \int_0^1 |F^{(n)}(x)|\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\varphi(n)}{|t|}\right)$$

con n intero positivo arbitrario. Se prendiamo in questa disuguaglianza, n uguale all'intero positivo per cui

$$\varphi(n) \leq \frac{|t|}{e} < \varphi(n+1)$$

cioè

$$n \leq \bar{\psi}\left(\frac{|t|}{e}\right) < n+1$$

si ha

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e \cdot e^{-\bar{\psi}\left(\frac{|t|}{e}\right)} = A e^{-\psi(|t|)}$$

con A costante.

Che gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)t^n|\,dt$$

esistano finiti segue dalle disuguaglianze

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)t^n|\,dt \leq A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi(|t|)} t^n dt \leq A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\psi(|t|)}{2}} dt \cdot \max_{0 \leq t < +\infty} e^{-\frac{\psi(t)}{2}} t^n.$$

Infine è chiaro che $F(x)$ non può essere quasi analitica perchè non è identicamente nulla e per $x = 0$ si annulla insieme con tutte le sue derivate.

Di qua, e poichè per la formula di inversione di FOURIER si ha

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{it(x-y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt,$$

il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE. — *Il teorema precedente resta vero anche se* $\psi(t)$ *è limitata oppure se è limitata* $t\psi'(t)$.

In entrambi questi casi si può determinare una funzione $\psi_1(t) > \psi(t)$ soddisfacente tutte le condizioni del teorema, e di qua segue l'asserto.

4. Una conseguenza immediata del teorema I è il teorema seguente.

TEOREMA III. — *Se* $\psi(t)$ *soddisfa le condizioni del teorema I;*

se F(x) *è una funzione indefinitamente derivabile sopra l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *e ivi a quadrato sommabile; se la trasformata di* FOURIER *della* F(x)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx$$

è tale che sia sempre

$$|f(t)| < Ae^{-\psi(t)}$$

e gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) t^n| dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

esistano finiti, allora F(x) *è quasi analitica.*

Infatti, per la formula di inversione di FOURIER, che vale essendo $F(x)$ a quadrato sommabile sopra l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ (3), si ha

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt,$$

e allora basta applicare il teorema I.

Dal teorema II si deduce invece il teorema seguente.

TEOREMA IV. — *Se* ψ(t) *soddisfa le condizioni del teorema II; esiste una funzione* F(x) *indefinitamente derivabile sopra l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *e ivi a quadrato sommabile, non quasi analitica, identicamente nulla fuori di un intervallo finito, la cui trasformata di Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx$$

soddisfa la disuguaglianza

$$|f(t)| < Ae^{-\psi(|t|)}$$

con A *costante, ed è tale che gli integrali*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) t^n| dt, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

esistano finiti.

5. Una ulteriore conseguenza dei teoremi I e II è il teorema seguente.

(3) Vedi F. RIESZ, *Sur la formule d'inversion de Fourier.* « Acta Szeged », Vol. 3 (1927), pp. 235-241.

TEOREMA V. — *Se* $\psi(t)$ *ed* $f(t)$ *soddisfano le condizioni del teorema I e se è, inoltre,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^n dt = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

è $f(t) = 0$, *ovunque esclusi al più i punti di un insieme di misura nulla.*

Se $\psi(t)$ *soddisfa le condizioni del teorema II, esiste una funzione* $f(t)$ *continua nell'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *tale che sia sempre*

$$|f(t)| < Ae^{-\psi(|t|)}$$

con A *costante, esistano finiti gli integrali*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)t^n| dt, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

sia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^n dt = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

e non sia quasi dappertutto $f(t) = 0$ (¹).

Infatti, nelle ipotesi della prima parte dell'enunciato

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt} dt$$

è quasi analitica, ed è

$$F^{(n)}(0) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^n dt = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ne viene $F(x) \equiv 0$.

D'altronde $f(t)$ è a quadrato integrabile sopra l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ix(t-y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx = 0,$$

intendendo che questa disuguaglianza vale quasi dappertutto sull'asse reale.

Nelle ipotesi della seconda parte dell'enunciato, basta prendere come funzione $f(t)$ quella considerata nella dimostrazione del teorema II.

(¹) La prima parte di questo teorema, nelle ipotesi dell'Osservazione I al Teorema I, si trova in S. TAKENAKA, loc. cit..

6. Ricordiamo che una classe di funzioni indefinitamente derivabili sopra un dato intervallo si dice quasi analitica quando non esistono due funzioni distinte della classe, $F_1(x)$, $F_2(x)$, per le quali in un punto $\bar{x}$ si abbia

$$F_1^{(n)}(\bar{x}) = F_2^{(n)}(\bar{x}), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ciò posto, per le funzioni indefinitamente derivabili sopra l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ si ha il teorema seguente.

TEOREMA VI. — *Se* $\varphi(n)$ *è una funzione monotona non decrescente per* $n > 0$; *se* C_φ *è la classe delle funzioni* $F(x)$ *indefinitamente derivabili sopra l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *per ciascuna delle quali esiste una costante* k *tale che sia*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\,dx < k, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(n)}(x)|\,dx < (k\varphi(n))^n, \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè C_φ *sia quasi analitica è che l'integrale*

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{\varphi(n)} \tag{3}$$

diverga.

Supposto che la classe C_φ non sia quasi analitica, esiste una funzione $F(x)$ della classe per la quale in un punto $\bar{x}$ si ha

$$F^{(n)}(\bar{x}) = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

senza che $F(x)$ sia identicamente nulla, e possiamo supporre che in nessun intorno a destra di $\bar{x}$ $F(x)$ sia identicamente nulla. Considerata nell'intervallo $(\bar{x}, \bar{x} + 1)$ la funzione

$$G(x) = \int_{\bar{x}}^{x} F(x)dx$$

si ha

$$|G(x)| < k, \quad |G^{(n)}(x)| < (k\varphi(n))^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e $G(x)$ evidentemente non è quasi analitica. Dal teorema fondamentale di DENJOY e CARLEMAN segue perciò che l'integrale (3) converge.

Viceversa se l'integrale (3) converge, esiste, per il teorema ora citato, una funzione non identicamente nulla $f(x)$, indefinitamente derivabile sopra l'intervallo $(0, 1)$, tale che

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$|f(x)| < k, \quad |f^{(n)}(x)| < (k\varphi(n))^n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

con k costante. Posto $F(x) = f(x)$ nell'intervallo $(0, 1)$ ed $F(x) = 0$ per gli altri valori di x, $F(x)$ appartiene alla classe C_φ, e questa non può essere quasi analitica.

Con lo stesso ragionamento e applicando la disuguaglianza di SCHWARZ si dimostra il

TEOREMA VII. — *Se* $\varphi(n)$ *è una funzione monotona non decrescente per* $n > 0$; *se* $C_\varphi^{(2)}$ *è la classe delle funzioni* $F(x)$ *indefinitamente derivabili sopra l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *per ciascuna delle quali esiste una costante* k *tale che sia*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx < k^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(n)}(x)|^2 dx < (k\varphi(n))^{2n}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè $C_\varphi^{(2)}$ *sia quasi analitica è che l'integrale*

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{n}$$

converga (5).

(5) Vedi PALEY and WIENER, *Notes on the theory and applications of Fourier transforms*, I-II, « Trans. of the Ann. Math. Soc. », Vol. 35 (1933), pp. 348-355.