Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Gherardelli

Un'osservazione sulle corrispondenze simmetriche a valenza positiva o nulla

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.3, p. 134–135.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_3_134_0>

Un'osservazione sulle corrispondenze simmetriche a valenza positiva o nulla.

Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI (a Firenze).

Sunto. - *Una corrispondenza simmetrica a valenza* $\gamma \geq 0$ *sopra una curva algebrica è ordinaria o nulla: nel primo caso* γ *è pari, nel secondo* γ *è dispari e la dimensione* $r \geq \gamma$ *anche dispari.*

Sopra una curva piana algebrica irriducibile $f = 0$, una corrispondenza (α, α') a valenza $\gamma \geq 0$ è rappresentabile con un'equazione:

$$F(x, y;\ x', y') = 0, \tag{1}$$

fra le coordinate di due punti omologhi; F è un polinomio nelle x, y i cui coefficienti son polinomi nelle x', y'.

Se r è la « dimensione » della corrispondenza la (1) si scrive [1]:

$$\varphi_0(x, y)\psi_0(x', y') + \varphi_1(x, y)\psi_1(x', y') + \ldots + \varphi_r(x, y)\psi_r(x', y') = 0, \tag{2}$$

dove $\varphi_0 \varphi_1 \ldots \varphi_r$ e così pure $\psi_0 \psi_1 \ldots \psi_r$ son polinomi linearmente indipendenti (mod. f). L'intero r è un carattere invariante della corrispondenza: se x è un punto generico di f e $x_1' x_2' \ldots x'_{\alpha'}$, $x_1 x_2 \ldots x_\alpha$ i suoi omologhi nella corrispondenza data e nella sua inversa, i gruppi $\gamma x + x_1' + x_2' + \ldots + x'_{\alpha'}$, e $\gamma x + x_1 + x_2 + \ldots + x_\alpha$ « appartengono » a serie lineari $g^r_{\gamma+\alpha'}$, $g^r_{\gamma+\alpha}$ della medesima dimensione r.

Se la corrispondenza è simmetrica i due sistemi lineari di curve piane $\Sigma \lambda_i \varphi_i = 0$, $\Sigma \psi_i \mu_i = 0$ staccano su f, fuori di eventuali punti fissi, una medesima serie lineare $g^r_{\gamma+\alpha}$. Fra i due sistemi stessi, come totalità lineari ∞^r di curve, intercede un'omografia:

$$\lambda_i = \Sigma\, a_{ik} \mu_k,$$

che associa due curve passanti per uno stesso gruppo della serie.

Se (ξ, η) è un punto qualunque di f le due curve:

$$\Sigma\, \psi_i(\xi, \eta)\varphi_i(x, y) = 0\,; \quad \Sigma\, \varphi_i(\xi, \eta)\psi_i(x, y) = 0,$$

si corrispondono nell'omografia, onde:

$$\psi_i = \Sigma\, a_{ik} \varphi_k, \qquad \text{(mod. } f).$$

[1] HURWITZ, *Ueber algebraische Korrespondenzen.* « Math. Ann. », (28), 1887, p. 568 e segg. C. SEGRE, *Un principio di riduzione...* « Rend. Acc. Lincei », $(28)_2$, 1919, p. 398, n. 5. Vedasi anche: M. VILLA, *Sulle corrispondenze a valenza positiva o nulla,* in *Scritti matematici offerti a L. Berzolari,* Pavia, Istituto Matematico della R. Università (1936), p. 479.

L'equazione (2) prende allora la forma:

$$\Sigma\, a_{ik}\varphi_i(x, y)\varphi_k(x', y') = 0.$$

Ma per la simmetria della corrispondenza:

$$\Sigma\, a_{ik}\varphi_i(x, y)\varphi_k(x'y') \equiv \Sigma\, a_{ki}\varphi_i(x, y)\varphi_k(x'y'),$$

e di qui, per l'indipendenza lineare delle φ_i, segue ovviamente che il determinante $|a_{ik}|$ è simmetrico od emisimmetrico.

Si conclude che la più generale corrispondenza simmetrica a valenza $\gamma \geq 0$ appartenente ad una curva algebrica f è rappresentabile con un'equazione del tipo:

$$\Sigma_0^r\, a_{ik}\varphi_i(x, y)\varphi_k(x'y') = 0, \tag{3}$$

dove $\varphi_0 \varphi_1 \ldots \varphi_r$ son polinomi linearmente indipendenti (mod. f) e il determinante $|a_{ik}|$ è simmetrico od emisimmetrico. L'intero r è la «dimensione» della corrispondenza. Se $|a_{ik}|$ è emisimmetrico, la dimensione r è necessariamente dispari.

Sulla curva C di S_r:

$$y_i = \varphi_i(x, y),$$

immagine projettiva della $g^r_{\alpha+\gamma}$, la corrispondenza (3) è subordinata da una polarità non degenere che può essere ordinaria o nulla. La corrispondenza stessa potrà dirsi ordinaria o nulla. Nel primo caso, se gli S_{k-1} osculatori di C (ma non gli S_k) appartengono alla quadrica fondamentale della polarità, l'iperpiano polare di un punto generico di C contiene l'S_{2k-1} osculatore ivi a C (ma non l'S_{2k} osculatore); onde $\gamma = 2k$ è pari. Nel secondo caso, se gli S_{k-1} osculatori di C (ma non gli S_k) son totali pel complesso lineare di rette fondamentale per la polarità, l'iperpiano polare di un punto generico di C contiene l'S_{2k-2} osculatore ivi a C (ma non l'S_{2k-1} osculatore); onde $\gamma = 2k - 1$ è necessariamente dispari. Dunque:

Una corrispondenza simmetrica ordinaria ha valenza γ pari; una corrispondenza simmetrica nulla ha valenza γ dispari e dimensione $r \geq \gamma$ *anche dispari.*

Come equazione canonica di una corrispondenza simmetrica a valenza $\gamma \geq 0$ può assumersi la:

$$\Sigma_0^r\, \varphi_i(x, y)\varphi_i(x'y') = 0,$$

ovvero la:

$$\Sigma\, (-1)^i \varphi_i(x, y)\varphi_{r-i}(x'y') = 0,$$

secondochè la corrispondenza stessa è ordinaria o nulla.