Silvio Cinquini

Sopra alcuni nuclei analitici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.3, p. 125–133.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_3_125_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1937.

PICCOLE NOTE

Sopra alcuni nuclei analitici (*).

Nota di Silvio Cinquini (a Pisa).

Sunto. - *Si arrecano alcuni complementi ai risultati ottenuti dal prof.* S. Pincherle *per alcuni nuclei analitici regolari normali, supponendo nella presente Nota che questi nuclei abbiano rango finito. Questa ipotesi permette inoltre di considerare i nuclei in questione sotto condizioni le quali, oltre ad avere una forma semplicissima, offrono il vantaggio di essere più generali di quelle del* Pincherle.

La lettura dell' ultima Memoria (¹) del mio venerato Maestro prof. S. Pincherle, nella quale l'A. si è occupato degli operatori lineari, e, in modo particolare, di quelli normali di rango finito, mi induce a riprendere lo studio di un precedente lavoro del prof. Pincherle (²), in cui l'A. si occupa di alcuni nuclei analitici regolari normali, e dal quale hanno già avuto origine altre ricerche (³), per arrecare ai risultati ottenuti dal Pincherle qualche complemento valido sotto l'ipotesi che tali nuclei abbiano rango finito.

Questa limitazione permette, d'altra parte, di considerare i nuclei in questione sotto condizioni, precisate al n° 2 della presente Nota, le quali, oltre ad avere una forma semplicissima, offrono il vantaggio di essere più generali di quelle del Pincherle, che vengono richiamate al n° 1.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(¹) S. Pincherle, *Contributo alla teoria degli operatori lineari*, « Annali di Matematica pura ed applicata », S. IV, T. XV (1936), pp. 243-308.

(²) S. Pincherle, *Sopra alcuni nuclei analitici*, « Mem. della R. Accademia delle Scienze di Bologna », Vol. XX (1915-6).

(³) Vedi in questo « Bollettino » le mie Note [A. IX (1930) e A. X (1931)] e quelle di R. Badescu [A. X (1931) e A. XI (1932)].

Pur astenendoci, per brevità, dal riassumere i risultati ottenuti nella presente Nota, vogliamo rilevare che essi forniscono un esempio delle interessanti applicazioni, a cui può dar luogo il concetto, introdotto dal PINCHERLE, di rango finito, anche quando, abbandonate del tutto le considerazioni puramente formali, si richiede la completa precisazione delle condizioni di validità dei risultati che si ottengono.

1. Preliminari. — Nel lavoro citato in (²) il PINCHERLE considera nuclei della forma seguente

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{n+\nu,\, n} x^{n+\nu}}{y^{n+1}}, \tag{1}$$

per i quali suppone l'esistenza di tre numeri positivi g, r, r_1, tali che sia

$$|a_{n+\nu,\, n}| < g r_1^{\,n} r^{-n-\nu}, \qquad (n, \nu = 0, 1, 2, \ldots); \tag{2}$$

cosicchè è assicurata la convergenza della serie (1) per ogni coppia (x, y) tale che sia

$$|x| < r, \quad |x| < \frac{r}{r_1} |y|. \tag{3}$$

Supposto che i piani delle due variabili complesse x, y coincidano, considerata una funzione $f(x)$ analitica regolare nell'intorno dell'origine

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \tag{4}$$

preso un numero $r_2 > 0$, minore di r e del raggio di convergenza della serie (4), e indicata con C_{r_2} la circonferenza che ha il centro nell'origine e raggio r_2, l'A. considera l'operazione integrale,

$$A(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}} K(x, y) f(y) dy, \tag{5}$$

il cui risultato è una funzione analitica regolare entro il cerchio avente il centro nell'origine e per raggio il minore dei due numeri r, $\frac{r r_2}{r_1}$.

Se è

$$r < r_1, \tag{6}$$

l'operazione A è regolare. Essa è inoltre normale, perchè nella (1) è $a_{m,\, n} = 0$, per $m < n$. L'A. suppone inoltre che gli $a_{n,\, n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ siano tutti diversi da zero e diversi fra loro; e da quest'ultima ipotesi segue che i valori caratteristici (o numeri invarianti) sono a due a due distinti. Sotto queste ipotesi l'A. dimostra che l'equazione di FREDHOLM (ove φ è la funzione incognita),

$$\varphi(x) - \lambda A(\varphi) = f(x),$$

ammette soluzione per λ diverso dai valori caratteristici e che questa soluzione è analitica regolare per $|x| < r$. Prova inoltre che le funzioni caratteristiche (o elementi invarianti) sono analitiche regolari per $|x| < r$, e che le funzioni caratteristiche associate (o aggiunte) sono funzioni razionali intere in $\frac{1}{x}$.

2. **Generalità.** — Nella presente Nota supponiamo che esista un numero intero $s \geq 0$, tale che sia

$$(7) \qquad a_{n+\nu, n} = 0, \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \nu > s, \quad (\text{oltrechè per } \nu < 0),$$

e che non siano tutti nulli gli $a_{n+s, n}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, e, attenendoci alla terminologia del PINCHERLE [4], diciamo che il nucleo

$$(8) \qquad K_s(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{s} a_{n+\nu, n} x^\nu \right) \frac{x^n}{y^{n+1}},$$

e quindi anche l'operazione integrale, a cui esso dà origine, è *di rango* s. Si supponga anche che sia $a_{n, n} \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Inoltre, in luogo delle (2) e (6), supponiamo che le $s + 1$ serie

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+\nu, n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, s)$$

siano assolutamente convergenti [5], cosicchè la convergenza della serie (8) è assicurata per ogni coppia x, y, con $|x| \leq |y|$.

Quindi, a differenza dal nucleo (1), il quale, per le (2) e (6), converge per tutte le coppie x, y appartenenti ad un'opportuna corona circolare, che può variare, ma il cui raggio maggiore non può superare r, per il nucleo (8) questa corona circolare si riduce ad una semplice circonferenza, ma il suo raggio può essere comunque grande.

Pertanto il risultato dell'operazione

$$A_s(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} K_s(x, y) f(y) dy,$$

ove basta supporre che il raggio R della circonferenza C_R sia mi-

(4) Vedi S. PINCHERLE, luogo cit. in (1), Cap. IV, § IV, n° 59, p. 270, ed anche Cap. VIII, § I, n° 125, p. 304.

(5) Se sono verificate le (2) e (6), questa ipotesi è sicuramente soddisfatta.

nore del raggio di convergenza della serie (4), è una funzione analitica regolare per $|x| \leq R$.

Quindi, se $f(x)$ è una funzione intera, della stessa proprietà gode anche la funzione $A_s(f)$, e quindi pure le $A_s^2(f)$, $A_s^3(f)$, ...

3. **Primo teorema di Fredholm.** — *Se* $K_s(x, y)$ *soddisfa alle ipotesi del n° 2 e se* $f(x)$ *è una funzione intera, anche la soluzione* $\varphi(x)$ *dell'equazione di Fredholm*

$$\varphi(x) - \lambda A_s(\varphi) = f(x). \tag{10}$$

è, per ogni λ *diverso dai valori caratteristici, una funzione intera.*

Infatti, considerata una circonferenza C_R di centro nell'origine e di raggio R, comunque fissato, si possono ripetere tutte le considerazioni fatte dal PINCHERLE al n° 4 della Memoria citata in [2]. Si conclude quindi, innanzi tutto, che per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo la soluzione $\varphi(x)$ della (10) è analitica regolare per $|x| \leq R$, e successivamente che tale proprietà è verificata per ogni λ diverso dai valori caratteristici, i quali sono ancora gli elementi della successione $\dfrac{1}{a_{n,n}}$, $(n = 0, 1, 2, ...)$.

Siccome R può essere preso grande a piacere, il nostro asserto è con ciò provato.

4. **Funzioni caratteristiche.** — *Se* $K_s(x, y)$ *soddisfa alle ipotesi del n° 2 le funzioni caratteristiche relative al nucleo* $K_s(x, y)$ *sono funzioni intere.*

a) Per semplicità di scrittura supponiamo che il rango s del nucleo $K_s(x, y)$ sia uguale a 2, ma avvertiamo che la nostra dimostrazione è valida anche quando s sia un numero finito qualunque.

In modo analogo al PINCHERLE, applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati, ponendo

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n ;$$

dovrà essere

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \equiv \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a_{n,n} + a_{n+1,n}x + a_{n+2,n}x^2)x^n,$$

e quindi anche, per il principio di identità delle serie di potenze,

$$\begin{cases} C_0(1 - \lambda a_{0,0}) = 0 \\ C_1(1 - \lambda a_{1,1}) = \lambda C_0 a_{1,0} \\ C_n(1 - \lambda a_{n,n}) = \lambda C_{n-1} a_{n,n-1} + \lambda C_{n-2} a_{n,n-2}, \qquad (n = 2, 3, ...). \end{cases} \tag{11}$$

b) Supponiamo che i valori caratteristici $\frac{1}{a_{n,n}}$, $(n=0, 1, 2, \dots)$, siano a due a due distinti. Sia $\lambda = \frac{1}{a_{r,r}}$; e si prenda $C_0 = C_1 = \dots = C_{r-1} = 0$. La $(r+1)$-esima equazione è soddisfatta qualunque sia C_r, e le altre equazioni, posto

$$(12) \qquad a_{rr} - a_{n+r,\,n+r} = \alpha_n, \quad a_{n+r,\,n+r-1} = \beta_n, \quad a_{n+r,\,n+r-2} = \gamma_n,$$

assumono la forma seguente

$$\begin{cases} \alpha_1 C_{r+1} = \beta_1 C_r \\ \alpha_n C_{r+n} = \beta_n C_{r+n-1} + \gamma_n C_{r+n-2}, \qquad (n = 2, 3, 4, \dots). \end{cases}$$

Risulta

$$\left\{\begin{aligned} C_{r+1} &= \frac{\beta_1}{\alpha_1} C_r \\ C_{r+2} &= \left(\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right) C_r \\ C_{r+3} &= \left(\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \frac{\gamma_2\beta_3}{\alpha_2\beta_3} + \frac{\beta_1\gamma_3}{\alpha_1\alpha_3}\right) C_r \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{r+2n} &= \left(\frac{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2n}}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n}} + \dots + \frac{\gamma_2\gamma_4\dots\gamma_{2n}}{\alpha_2\alpha_4\dots\alpha_{2n}}\right) C_r \\ C_{r+2n+1} &= \left(\frac{\beta_1\beta_2\dots\beta_{2n+1}}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2n+1}} + \dots + \frac{\beta_1\gamma_3\dots\gamma_{2n+1}}{\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_{2n+1}}\right) C_r \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

ove il numero h_j dei termini che compaiono nella parentesi di C_{r+j} soddisfa alle relazioni

$$(13) \qquad \begin{cases} h_0 = h_1 = 1 \\ h_j = h_{j-1} + h_{j-2}, \qquad (j = 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Inoltre il numeratore (e anche il denominatore) di ognuno di tali termini è, per $j = 2n$, un prodotto, il numero dei cui fattori è $\geq n$ e $\leq 2n$; e se in uno di questi prodotti, che figurano al numeratore, non compare il fattore γ_s, $(s = 2, 4, 6, \dots, 2n-2)$ vi compare almeno uno dei seguenti: β_s, β_{s+1}, γ_{s+1}. Osservazioni analoghe si possono fare per $j = 2n + 1$.

Per ogni intero positivo n_1 sia g'_{n_1} il maggiore dei moduli di β_{n_1} e γ_{n_1}, e per ogni intero positivo n indichiamo con g_{2n} il maggiore dei due numeri g'_{2n}, g'_{2n+1}. In virtù della convergenza delle serie (9) e tenendo presenti le (12) è, per $n \to \infty$, $\beta_n \to 0$, $\gamma_n \to 0$, e quindi indicato con μ il numero complessivo di quelli, fra i β_n

e i γ_n, che sono in modulo > 1, e con M il massimo modulo dei β_n e γ_n, $(n = 1, 2, ...)$, i numeri μ e M sono entrambi finiti.

Infine, indicato con σ_0 il minimo modulo degli α_n, il quale è certamente positivo avendo supposto che i valori caratteristici siano a due a due distinti, e posto

$$\sigma = \sigma_0, \text{ se è } \sigma_0 \geq 1, \qquad \sigma = \sigma_0^2, \text{ se è } \sigma_0 < 1,$$

risulta

$$|C_{2n}| \leq h_{2n} \frac{M^\mu g_2 g_4 \dots g_{2n}}{\sigma^n} = h_{2n} q_{2n}.$$

Per provare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} q_{2n} x^{2n}$ ha raggio di convergenza infinito, consideriamo il massimo limite di $\sqrt[2n]{h_{2n} q_{2n}}$, osservando che è

$$\overline{\lim} \sqrt[2n]{q_{2n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{q_{2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{q_{2n}}{q_{2n-2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{g_{2n}}{\sigma} = 0,$$

in conseguenza della convergenza delle serie (9), delle (12) e del modo in cui è stato definito g_{2n}. D'altra parte il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} x^{2n}$ è > 0 ([6]), e quindi il $\overline{\lim} \sqrt[2n]{h_{2n}}$ non può essere infinito. Ne segue $\overline{\lim} \sqrt[2n]{h_{2n} q_{2n}} = 0$, e quindi il nostro asserto è provato. In modo analogo si dimostra che anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} h_{2n+1} q_{2n+1} x^{2n+1}$ ha raggio di convergenza infinito, e si con-

([6]) Infatti moltiplicando ambo i membri delle (13) rispettivamente per x^j, e sommando rispetto ad j da 2 all'infinito risulta

$$\sum_{j=2}^{\infty} h_j x^j = x \sum_{j=2}^{\infty} h_{j-1} x^{j-1} + x^2 \sum_{j=2}^{\infty} h_{j-2} x^{j-2},$$

e quindi, posto $S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j x^j$, e tenendo conto delle prime due delle (13), se ne deduce $S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$. Dunque $S(x)$ è analitica regolare nell'intorno dell'origine, e perciò il raggio di convergenza della serie $\sum_{j=0}^{\infty} h_j x^j$ è maggiore di zero.

È da rilevare che, nelle ipotesi in cui ci siamo posti all'inizio del capoverso a), $(s = 2)$, la successione degli h_j è la classica successione di FIBONACCI, ma che la proprietà ora dimostrata si prova in modo perfettamente analogo anche per $s > 2$.

clude che la funzione caratteristica corrispondente al valore $\frac{1}{a_{r,r}}$ è una funzione intera [7].

c) Se poi $\frac{1}{a_{\mu_1,\mu_1}}$ è un valore caratteristico che ha ordine ν di molteplicità ed è precisamente

$$a_{\mu_1,\mu_1} = a_{\mu_2,\mu_2} = \dots = a_{\mu_\nu,\mu_\nu} \qquad (\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\nu)$$

si può soddisfare al sistema (11), come si è visto in *b)*, prendendo $C_0 = C_1 = \dots = C_{\mu_\nu - 1} = 0$; e si ottiene così una prima funzione caratteristica $\varphi(x)$, corrispondente a $\lambda = \frac{1}{a_{\mu_1,\mu_1}}$, la quale è una funzione intera, che, per $x=0$, ha una radice dell'ordine μ_ν di molteplicità.

Però possono aversi, al più, altre $\nu - 1$ funzioni caratteristiche, che insieme con la precedente formano un sistema di ν funzioni linearmente indipendenti.

Precisamente, se j è un numero intero positivo minore di ν, si prenda $C_0 = C_1 = \dots = C_{\mu_{j-1}} = 0$; si lasci C_{μ_j} arbitrario e si consideri il sistema

$$\begin{cases} C_n\left(1 - \dfrac{a_{n,n}}{a_{\mu_1,\mu_1}}\right) = \dfrac{C_{n-1}a_{n,n-1}}{a_{\mu_1,\mu_1}} + \dfrac{C_{n-2}a_{n,n-2}}{a_{\mu_1,\mu_1}}, \\ (n = \mu_j + 1,\ \mu_j + 2, \dots,\ \mu_{j+1} - 1). \end{cases}$$

Se questo sistema ammette una soluzione, non identicamente nulla $C_{\mu_j}, C_{\mu_{j+1}}, \dots, C_{\mu_{j+1}-1}$, otteniamo una funzione caratteristica $\varphi_j(x)$ la quale è una funzione razionale intera di grado non superiore a $\mu_{j+1} - 1$, e che, per $x=0$, ha una radice dell'ordine di molteplicità μ_j [8].

Evidentemente le $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{\nu-1}(x)$ e la $\varphi(x)$ sono linearmente indipendenti, e con ciò il nostro teorema è completamente dimostrato.

Osservazione. — Si vede facilmente che se il nucleo $K(x, y)$ non ha rango finito, la proprietà dimostrata nel *b)* del presente n.° può non essere verificata. Sia

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n}\left(1 + \frac{x}{r} + \frac{x^n}{r^n}\right)\frac{x^n}{y^{n+1}}, \qquad \text{con } r > 1.$$

(7) Osserviamo che nel caso particolare in cui il nucleo $K_s(x, y)$ ha rango 1, si calcola facilmente l'espressione formale di ogni funzione caratteristica (cfr. S. Pincherle, luogo cit. (1), Cap. IV, § III, n.° 58, pp. 269-270) e si dimostra immediatamente che ognuna di esse è funzione intera.

(8) Le considerazioni fatte dall'inizio del capoverso *c)* fino a questo punto sono valide anche se il nucleo $K(x, y)$ non ha rango finito, purchè soddisfi alle condizioni ricordate al n° 1.

Questa funzione rappresenta un nucleo analitico regolare normale per il quale sono verificate tutte le ipotesi fatte dal PINCHERLE e richiamate al n.° 1. Esso converge per ogni coppia x, y, con $|x| \leq r$, $|y| > \frac{x}{r}$, ma evidentemente il suo rango non è finito.

Considerato il valore caratteristico $\lambda = 1$, i coefficienti della funzione $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, ad esso corrispondente, debbono soddisfare al sistema

$$\begin{cases} C_1(r-1) = C_0, & \\ C_n(r^n - 1) = C_{n-1} + C_0, & (n = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

dal quale, moltiplicando ambo i membri dell'n-esima equazione, $(n = 2, 3, \ldots)$, per $(r-1)(r^2-1)\ldots(r^{n-1}-1)$ e sommando membro a membro le prime n equazioni, si deduce

$$C_n = C_0 \frac{1 + (r-1) + (r-1)(r^2-1) + \ldots + (r-1)(r^2-1)\ldots(r^{n-1}-1)}{(r-1)(r^2-1)\ldots(r^n-1)}.$$

Quindi, essendo $r > 1$, risulta $\frac{C_n}{C_0} > \frac{1}{r^n - 1}$, e perciò la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ non può convergere per $|x| \geq r$.

5. **Funzioni caratteristiche associate.** — Per quanto riguarda le funzioni caratteristiche associate nulla vi è da aggiungere, nel caso in cui i valori caratteristici siano a due a due distinti, al risultato ottenuto dal PINCHERLE (9). Nell'ipotesi che i valori caratteristici non siano a due a due distinti si possono svolgere considerazioni analoghe a quelle fatte nel *c)* del n.° precedente, e si conclude facilmente che, in ogni caso, *le funzioni caratteristiche associate sono funzioni razionali intere in* $\frac{1}{x}$ (10).

6. **Osservazioni.** — α) Evidentemente il prodotto di due (o di un numero finito di) operazioni integrali normali di rango finito, i cui nuclei soddisfano alle condizioni del n.° 2 è un'operazione che gode delle stesse proprietà, e il cui rango è uguale alla somma dei ranghi dei fattori.

(9) Vedi S. PINCHERLE, luogo cit. (2), n° 6.

(10) Anche per le considerazioni del presente n° può ripetersi quanto è stato detto in (8).

β) Termineremo mettendo in rilievo la seguente proprietà, la quale fornisce una conferma, per le operazioni considerate nella presente Nota, del risultato enunciato dal PINCHERLE alla fine dell'introduzione della Memoria citata in [1]:

Ogni operazione integrale analitica normale di rango finito è equivalente ad un' operazione differenziale lineare di ordine infinito.

Sviluppando il nucleo $K_s(x, y)$ in serie di $\frac{1}{y-x}$, abbiamo evidentemente, per $|x|<|y-x|$,

$$K_s(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{n+j}{j}\frac{x^j}{(y-x)^j}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{s}a_{n+\nu, n}x^\nu\right)\frac{x^n}{(y-x)^{n+1}},$$

e quindi, posto $n+j=p$, ed osservando che è $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=j}^{\infty}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}$, risulta

$$K_s(x, y)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sum_{j=0}^{p}(-1)^p\binom{p}{j}\left(\sum_{\nu=0}^{s}a_{p-j+\nu, p-j}x^\nu\right)x^p}{(y-x)^{p+1}}. \tag{14}$$

Per la convergenza delle serie (9), esiste un numero $M>0$, tale che

$$|a_{n+\nu, n}|\leq M, \quad (n=0, 1, 2, \ldots;\ \nu=0, 1, 2, \ldots, s),$$

e quindi, tenendo presente che è $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}=2^p$, si conclude facilmente che la serie (14) è convergente per tutte le coppie x, y per le quali è $|y-x|>2|x|$, e quindi « *a fortiori* » per $|y|>3|x|$.

Pertanto, se $f(x)$ è una funzione analitica regolare nell'intorno dell'origine, e se C_R è una circonferenza di centro nell'origine e raggio R, con R inferiore al raggio di convergenza dell'elemento di $f(x)$ relativo all'origine, posto

$$\alpha_p(x)\equiv\sum_{j=0}^{p}(-1)^p\binom{p}{j}\sum_{\nu=0}^{s}(a_{p-j+\nu, p-j}x^\nu)x^p,$$

abbiamo, per $|x|<\frac{R}{3}$, per la formula integrale di CAUCHY

$$A_s(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\alpha_p(x)}{(y-x)^{p+1}}\right)f(y)dy=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\alpha_p(x)}{p!}\frac{d^pf(x)}{dx^p},$$

come volevasi dimostrare.