BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

UMI

Recensioni

* O. Schreier - E. Sperner: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. T. I e T. II (Beniamino Segre)
* E. Müller - E. Kruppa: Lehrbuch der darstellende Geometrie (Beniamino Segre)
* G. Vranceanu: Les espaces non holonomes (Enea Bortolotti)
* S. Mandelbrojt, Séries lacunaires ; J. Favard, Les théorèmes de la moyenne pour les polynômes ; G. Bouligand - G. Giraud - P. Délens, Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel (Silvio Cinquini)
* Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, editi da Federigo Enriques (B. Levi)
* Th. de Bonder: Théorie invariantive du Calcul des Variations (B. Levi)
* Friedrich Waismann: Einführung in das mathematische Denken (L. Geymonat)
* Louis De Broglie: La physique nouvelle et les quanta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.2, p. 85–102.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_2_85_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1937.

RECENSIONI

O. SCHREIER - E. SPERNER: *Einführung in die analitische Geometrie und Algebra.* T. I, pp. 238 (Leipzig, Teubner, 1931); T. II, pp. 308 (Leipzig, Teubner, 1935). Prezzo per volume: RM. 8 (estero RM. 6); rilegato RM. 9,60 (estero RM. 7,20).

I capitoli fondamentali di algebra e geometria analitica negli spazi ad un qualunque numero di dimensioni svolti in questi due volumetti da E. SPERNER, sulla traccia di qualche appunto di lezione lasciato da O. SCHREIER, ricevono in essi una sistemazione didattica attraente, spesso lumeggiata da vedute originali e suggestive; l'esposizione, accuratissima, possiede lucidità e rigore esemplari. Ogni paragrafo è seguito da un certo numero di utili esercizi, aventi pure talora interesse teorico; mancano però quasi totalmente indicazioni storiche e bibliografiche, nonchè accenni a sviluppi ulteriori, che invece sarebbe stato opportuno inserire come integrazione degli argomenti trattati. L'opera risulta complessivamente eccellente, anche se si può qua e là dissentire sull'ordinamento o sulla scelta della materia, o preferire procedimenti dimostrativi di carattere più sintetico; essa non presuppone che poche nozioni relativamente elementari (sui numeri reali, sulle funzioni continue, ecc.), ma può anche venir letta con profitto da chi abbia cultura matematica elevata.

Ecco in breve il contenuto dei due volumi, ciascuno dei quali è diviso in tre parti.

Quelle del T. I sono ordinatamente dedicate ai sistemi di equazioni lineari, ai determinanti, alla teoria dei corpi numerici. L'ordine inconsueto con cui si succedono le due prime parti, ove p. es. si parla della caratteristica di una matrice avanti ancora di aver definito i determinanti, corrisponde ad un'elegante ed interessante geometrizzazione degli argomenti ivi svolti, i quali risultano imperniati nello studio degli spazi affini e degli spazi euclidei.

Precisamente, nella prima parte — premesse alcune nozioni sui vettori di S_n, loro combinazioni lineari e prodotti scalari — si deducono i risultati fondamentali sulla *dimensione* e sulla *base* di un sistema lineare di vettori, ed il teorema sull'*intersezione* di due sistemi siffatti, poggiando sul *teorema di scambio di* STEINITZ. La caratteristica o rango di una matrice è quindi introdotta come numero dei vettori linearmente indipendenti che hanno per componenti gli elementi delle varie sue colonne, ciò che permette di entrar subito nel cuore della teoria dei sistemi di equazioni lineari, concepiti come un'unica equazione vettoriale, e di stabilire che il rango di una matrice coincide con quello della sua trasposta.

Nella seconda parte, definita algoritmicamente in S_n la distanza euclidea di due punti e la lunghezza di un vettore, si giunge alla nozione di *valor assoluto di un determinante* come *volume di un parallelotopo* (per il quale si postulano quattro proprietà geometricamente intuitive), ed alla corrispondente caratterizzazione dei *determinanti* mediante tre loro semplici proprietà. Su tale fondamento poggia la dimostrazione dei teoremi ben noti concernenti i varî sviluppi di un determinante, il prodotto di due determinanti, la regola di CRAMER, infine il significato del rango di una matrice come minimo ordine dei suoi determinanti non nulli. Segue lo studio dei cambiamenti di coordinate parallele, delle coordinate cartesiane ortogonali e dei determinanti ortogonali, dei sistemi lineari di vettori ortogonali fra loro e delle distanze fra spazi subordinati di S_n, dei movimenti in S_n (specie per $n=2, 3$) e delle affinità.

La terza parte mostra come agli sviluppi precedenti possa darsi un'estrema generalità, sostituendo un qualunque corpo numerico al campo dei numeri reali (a cui si riferivano le considerazioni suddette). La nozione di corpo è introdotta dopo un'analisi chiara e profonda delle leggi che reggono l'*addizione* e la *moltiplicazione*, ed è completata colle proprietà dei polinomi ed ideali di un corpo, fino all'unicità dello spezzamento di un qualunque polinomio in fattori irriducibili in un corpo. Il volume si chiude con le definizioni e le prime proprietà concernenti i *numeri complessi*, e colla dimostrazione del *teorema fondamentale dell'algebra*.

Il T. II non possiede l'organicità del primo, le tre parti di quello — ordinatamente dedicate ai gruppi, alle matrici e trasformazioni lineari, alla geometria proiettiva — essendo fra loro un po' meno intimamente legate.

La prima parte del T. II stabilisce, sotto forma nitida e del tutto generale, le prime nozioni relative ai gruppi ed ai loro s o t t o g r u p p i, pervenendo infine al teorema sulla *base dei gruppi abeliani* con un sistema di generatori finito.

La seconda parte tratta delle t r a s f o r m a z i o n i l i n e a r i (in un dato corpo $\mathcal{K}$) di un sistema lineare di vettori in sè, le quali sono anzitutto introdotte geometricamente come operazioni distributive fra vettori, e quindi studiate analiticamente ricollegandole al calcolo colle m a t r i c i quadrate (appartenenti a $\mathcal{K}$), attraverso cui vengon dimostrate l'esistenza e l'unicità del *polinomio minimo* e le proprietà — che da questo dipendono — dei *sistemi lineari invarianti* e dei *sistemi degli zeri,* nonchè delle trasformazioni lineari le cui matrici possono ridursi a *forma diagonale*; queste ultime sono di più c a r a t t e r i z z a t e, nel campo complesso, in relazione alle radici del loro *polinomio caratteristico.* Segue lo studio delle così dette *trasformazioni unitarie* (estendenti al campo complesso le trasformazioni ortogonali), delle *trasformazioni hermitiane* e dei loro casi particolari nel campo reale, colla riduzione sì delle une che delle altre a *forma canonica.* Viene infine svolta la teoria dei *divisori elementari* di una matrice quadrata ad elementi polinomî in un dato corpo, la quale è poi utilizzata nella riduzione delle matrici alla *forma canonica di* G. KOWALEWSKI ; da qui discende la riduzione delle matrici (con elementi complessi) alla *forma canonica di* JORDAN, il *teorema di* HAMILTON–CAYLEY, ecc..

L'ultima parte — principalmente dedicata, come già si è detto, alla g e o m e t r i a p r o i e t t i v a — occupa da sola più della metà del volume in esame, e sfrutta abilmente, anche se non integralmente, i varî strumenti precedentemente approntati. Così, i singoli *punti* di un S_n proiettivo vengon concepiti come sistemi lineari ∞^1 di vettori appartenenti ad un sistema lineare ∞^{n+1}, definito in un dato corpo, ciò che p. es. permette di ricondurre questioni sulla *dipendenza* od *indipendenza lineare* di punti, o sull'*intersezione* di spazi subordinati, a risultati vettoriali già acquisiti ; così, ancora, lo studio dei *cambiamenti di coordinate* e delle *trasformazioni proiettive* fra spazi è compiuto valendosi sistematicamente del calcolo e della teoria delle matrici. Le trasformazioni in S_n che di solito denominansi proiettività sono qui dette *proiettività lineari,* ed introdotte come casi particolari delle *proiettività* intese in senso staudtiano generalizzato, per le quali cioè si ammette solo la conservazione dei g r u p p i a r m o n i c i (condizione questa che, per $n \geq 2$, già consegue dalla conservazione delle relazioni di dipendenza lineare fra punti), onde i b i r a p p o r t i di due quaterne omologhe di due forme di 1ª specie — corrispondentisi in una di uelle — risultano (non necessariamente uguali, ma) legati ad un automorfismo del corpo fondamentale (1). Ciò che precede è da ultimo in parte utilizzato nella teoria delle quadriche di S_n, relativamente alle quali — dopo un rapido studio delle loro proprietà più elementari — vien fatta (con speciale riguardo ai casi $n=2$, 3) una classificazione minuziosa ed esauriente, sì nel campo reale che nel campo complesso, dai punti di vista proiettivo, affine ed euclideo; questi sviluppi riescono saldamente inquadrati nelle classiche vedute gruppali di KLEIN, e sono completati da cenni sulle *geometrie euclidea e non euclidee* secondo LAGUERRE, CAYLEY e KLEIN.

Entrambi i volumi hanno ottima veste tipografica, e terminano con un indice alfabetico per materie. BENIAMINO SEGRE

E. MÜLLER † - E. KRUPPA: *Lehrbuch der darstellende Geometrie.* 4ª ed., in 3 parti (pp. VII+1-130, VII+131-242, VII+243-390); Leipzig, Teubner, 1936.

Questa 4ª edizione — totalmente rinnovata — del noto Trattato del MÜLLER, è stata profondamente rielaborata ed in varî punti opportunamente isnellita e completata dal KRUPPA, sì che i pregi di chiarezza, accuratezza e compendiosità ne riescono sensibilmente accresciuti. Nelle 390 pagine dei tre fascicoli costituenti il volume, lo studio esauriente dei principali metodi di rappresentazione non è tenuto disgiunto dalle applicazioni di natura tecnica, ed è integrato da ampi — seppure relativamente elementari — sviluppi di geometria algebrica o differenziale: i primi sono di solito condotti elementarmente o per via analitica, facendo uso piuttosto scarso della geometria proiettiva, ed i secondi poggiano per lo più su argomentazioni infinitesimali sintetiche, rese rigorose mediante acconce considerazioni di limite.

Il libro è ricco di particolari interessanti, come ad esempio taluni sviluppi concernenti le proprietà di curvatura delle superficie, la cartografia, gli strumenti pel disegno prospettico, la praticità delle varie costruzioni e la migliore scelta degli elementi fondamentali affinchè il disegno desti un'impressione di naturalezza; esso è corredato da frequenti notizie storiche e bibliografiche, da 366 nitidissime figure intercalate nel testo, da due indici alfabetici dei nomi e degli argomenti (posti alla fine del 3° fasci-

(1) A riprova della già segnalata deficienza di notizie storiche e bibliografiche, rileviamo ad esempio che qui nulla è detto tanto delle recenti ricerche sull'argomento del COMESSATTI, quanto dei fondamentali risultati di C. SEGRE e C. JUEL concernenti le antiproiettività (delle quali anzi neppure è fatto il nome!).

colo), e può ben dirsi didatticamente pregevole. Ecco in breve il suo contenuto.

Prima parte: *Proiezioni su di un quadro.* — Nozioni fondamentali relative alle proiezioni centrali e parallele delle figure piane su di un quadro; affinità e collineazioni. Elementi della teoria delle curve e superficie, e loro rappresentazione. Proiezioni quotate; superficie topografiche. Curve, coni e cilindri del 2° ordine.

Seconda parte: *Proiezioni ortogonali. Superficie.* — Prime, seconde e terze proiezioni. Teoria delle ombre. Superficie di rotazione, elicoidali, rigate; quadriche; superficie grafiche. Superficie sviluppabili. Teoremi di MEUSNIER ed EULERO; indicatrice di DUPIN; asintotiche e linee di curvatura.

Terza parte: *Assonometria. Prospettiva. Cartografia.* — Assonometria obliqua ed ortogonale. Prospettiva parallela e centrale; omologia spaziale. Proiezioni ortografica, stereografica e gnomonica; rappresentazioni di LAMBERT, MERCATOR e MOLLWEIDE.

BENIAMINO SEGRE

G. VRANCEANU: *Les espaces non holonomes.* (Fasc. LXXVI del « Mémorial des Sciences Mathém. »). Paris, Gauthier-Villars, 1936, 70 pagg.

La teoria di cui l'A. dà qui una sintetica esposizione è una generalizzazione della geometria degli spazi riemanniani e a connessione affine, della quale l'A. stesso è stato iniziatore e uno dei principali artefici. Anzi, nel particolare indirizzo qui adottato, si tratta proprio di una costruzione personale dell'A.; su cui è interessante poter dare, scorrendo questo volumetto, uno sguardo riassuntivo.

La prima idea di varietà — o meglio: di superficie — *anolonoma* si può rintracciare in un lavoro di A. VOSS (1): in cui questi ha esteso al *connesso* formato associando a ciascun punto dello spazio ordinario arbitrariamente un piano per esso molte nozioni e risultati relativi al caso particolare in cui i piani associati ai punti dello spazio siano quelli ivi tangenti a un sistema di superficie (caso olonomo). Gli studi del VOSS sono stati ripresi dall'abate ISSALY, e più recentemente da D. SINTZOV; e sotto un aspetto alquanto differente anche ~~da~~ R. A. P. ROGERS, da DARBOUX, da U. CASSINA (2). Ma già al VOSS si era presentata

(1) *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme.* « Mathem. Annalen » B. 23, 1884, pp. 45-81.

(2) *Sulle trajettorie ortogonali di una congruenza di linee.* « Atti Ist. Veneto », t. 81, 1921-22, pp. 275-288.

una veduta assai feconda, quella che ha poi ispirato il VRANCEANU: la sua teoria dei « sistemi di punti e piani » poteva dare *una geometrizzazione dello studio meccanico di un sistema anolonomo.* Appunto sotto questo aspetto G. VRANCEANU ha introdotto nel 1926 [1] la nozione di « varietà riemanniana anolonoma » V_n^m: quale spazio delle configurazioni di un sistema meccanico anolonomo. Più esattamente: nell'aspetto *geometrico* una V_n^m ha come punti quelli di una ordinaria V_n: le sue linee, superficie,..., varietà h-dimensionali ($h \leq m$) sono le linee, le (eventuali) superficie,..., V_h integrali di un sistema di $n-m$ equazioni pfaffiane, in generale *non completamente integrabile.* Nel caso d'*integrabilità* cioè d'olonomia la V_n^m si riduce a ∞^{n-m} V_m di V_n. Nell'aspetto *meccanico,* una V_n^m si associa a ciascun sistema materiale anolonomo a vincoli indipendenti dal tempo, se interpretiamo $2\,T dt^2$, ove $T = \frac{1}{2} a_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$ è la forza viva del sistema, quale ds^2 di una V_n: giacchè le *equazioni traducenti i vincoli* determinano entro la V_n appunto una V_n^m.

Lo studio generale delle V_n^m iniziato dal VRANCEANU e poi, indipendentemente, ma con vedute differenti, intrapreso anche da Z. HORAK, da J. L. SYNGE; esteso da J. A. SCHOUTEN, con la introduzione delle X_n^m, varietà n-dimensionali ametriche in cui è data per ogni punto una m-direzione, e delle A_n^m a connessione affine, è l'oggetto di un numero rilevante di ricerche recenti: dovute, oltrechè agli Autori ora citati, ad É. CARTAN, a V. HLAVATY, ad A. WUNDHEILER, a P. DIENES a G. C. MOISIL e ad altri. (Qua in Italia non potrei citare sinora che alcuni contributi di A. MAXIA e dello scrivente).

Nel presente Mémorial il VRANCEANU non si propone di riferire circa lo stato attuale dell'intera teoria: ma piuttosto di dare una nozione precisa dei differenti punti di vista che in questo studio si possono adottare, e di sviluppare particolarmente, nelle loro conseguenze sia geometriche che meccaniche, le sue proprie vedute. Credo possa essere utile soffermarsi piuttosto su qualche idea generale che sul contenuto del volume: di cui darò soltanto un breve cenno.

Al sistema pfaffiano $(ds)^r = \overset{r}{X}_i dx^i = 0$ $(r, s = m+1,..., n;\ i, j = 1,..., n)$ che definisce, entro la V_n, la V_n^m si può in infiniti modi associare un « sistema pfaffiano complementare » $(ds)^a = \overset{a}{X}_i\, dx^i = 0$, tale

[1] *Sur les espaces non holonomes.* « Comptes Rendus de l'Acad. », Paris, t. 183, 1926, pp. 852-854.

che i vettori covarianti dell'n-upla $\overset{a}{X}_i$, $\overset{r}{X}_i$ siano indipendenti: così viene associata alla V_n^m una V_n^p $(p = n - m)$, tale che in ciascun punto della V_n ambiente la m-direzione dell'una, determinata dai vettori controvarianti $\underset{a}{X^i}$ tali che $\underset{a}{X^i} \overset{b}{X}_i = \delta_a^b$, $\underset{a}{X^i} \overset{r}{X}_i = 0$, e la p-direzione dell'altra, determinata dai vettori controvarianti $\underset{r}{X^i}$ tali che $\underset{r}{X^i} \overset{b}{X}_i = 0$, $\underset{r}{X^i} \overset{s}{X}_i = \delta_s^r$, *non hanno direzioni a comune.* Se *non* intendiamo assegnato un ds^2 per l'ambiente, le due varietà anolonome complementari V_n^m, V_n^p sono piuttosto da indicare (secondo SCHOUTEN) con X_n^m, X_n^p: esse sono *varietà topologiche anolonome*; però il VRANCEANU ha osservato che la loro assegnazione *dà luogo a una legge di trasporto affine dei vettori di* X_n^m *lungo le linee di* X_n^p *e viceversa*; e quando il sistema $(ds)^r = 0$, oppure $(ds)^a = 0$, *non ha combinazioni integrabili,* anche una legge di trasporto dei vettori di X_n^m lungo le linee di X_n^m, o di quelli di X_p^n lungo le linee di X_p^n; cosicchè se i due casi ora detti si presentano insieme si darà luogo a una *connessione affine completa* per la X_n ambiente. Gli invarianti di questa sono tutti e soli gli invarianti dei due sistemi pfaffiani, ma per le trasformazioni che conservano, insieme ad essi, anche i relativi « sistemi derivati ». Questo è stato il punto di partenza dell'A. in una serie di ricerche interessanti sulla *geometrizzazione dei sistemi di* PFAFF: su cui non potrei qui trattenermi. Dirò soltanto che la teoria ora accennata, e così pure tutte le ricerche sulle V_n^m, si svolgono in modo semplice ed elegante col simbolismo e coi procedimenti di calcolo adottati sistematicamente dall'A.: che costituiscono quello che egli dice « *calcolo differenziale assoluto delle congruenze* », diretta generalizzazione del metodo delle congruenze ortogonali di RICCI e LEVI-CIVITA, e quindi strettamente legato coi metodi del CARTAN e non dissimile dal « calcolo pfaffiano assoluto » secondo R. LAGRANGE (¹). In particolare sono dei « coefficienti di rotazione » generalizzati che tengono il ruolo dei simboli di CHRISTOFFEL.

Quando l'ambiente *ha una metrica riemanniana*, non è restrittivo supporne il ds^2 dato nella forma

$$ds^2 = [(ds)^1]^2 + \dots + [(ds)^m]^2 + [(ds)^{m+1}]^2 + \dots + [(ds)^n]^2.$$

In questa ipotesi le proprietà *intrinseche* della V_n^m sono quelle invarianti per le trasformazioni $(ds)^{a'} = c_a^{a'}(ds)^a + c_r^{a'}(ds)^r$, $(ds)^{r'} = c_r^{r'}(ds)^r$,

(¹) Ved. *Calcul Différentiel absolu,* Fasc. XIX del « Mémorial », Paris, Gauthier-Villars, 1926, p. 17.

ove le $c_r^{a'}$ sono del tutto arbitrarie; le $c_a^{a'}$ soggette soltanto alla condizione $|c_a^{a'}| \neq 0$, le $c_r^{r'}$ sono *i coefficienti di una sostituzione ortogonale.* Ma insieme a queste proprietà possono considerarsi quelle che l'A. chiama *proprietà semi-intrinseche* della V_n^m: invarianti pel sottogruppo caratterizzato da $c_r^{a'} = 0$; le cui trasformazioni conservano oltrechè V_n^m anche la V_n^p *ma non la sua metrica.* Una ulteriore limitazione del gruppo di trasformazione sugli n pfaffiani $(ds)^a$, $(ds)^r$, definita dalle condizioni $c_r^{a'} = 0$, $|c_a^{a'}|$ ortogonale, dà luogo alle *proprietà rigide* della V_n^m (e anche, della V_n^p): queste ultime trasformazioni conservano sia la V_n^m che la V_n^p, le metriche di entrambe e dell'ambiente.

L'A. ha studiato ampiamente le proprietà semi-intrinseche: di cui egli ha notato, in particolare, *l'interesse meccanico,* rivelato del fatto che hanno carattere semi-intrinseco le equazioni del movimento di un sistema meccanico anolonomo, secondo un risultato di J. HADAMARD.

Aggiungo qualche parola sul contenuto. Dopo un breve cenno storico l'A. svolge gli elementi del « calcolo differenziale assoluto delle congruenze » in X_n, in V_n riemanniana, in A_n a connessione affine. Applica l'algoritmo introdotto allo studio di una X_n^m e del sistema di una X_n^m ed una X_n^p *complementari* in X_n, indicando (almeno nelle ipotesi più semplici) il processo di costruzione della connessione affine completa di carattere topologicamente invariante (di cui s'è detto sopra), pel caso in cui non vi siano combinazioni integrabili. Quindi passa al caso in cui l'ambiente ha una metrica e svolge un'analisi abbastanza ampia sulle proprietà *semi-intrinseche* delle V_n^m. Fra gli elementi semi-intrinsechi vi è una « connessione interna » per la V_n^m, legge di trasporto congruente (alla LEVI-CIVITA) pei vettori di V_n^m lungo le linee di V_n^m. Nel caso (più generale) in cui il primo sistema derivato del sistema pfaffiano $(ds)^r = 0$ *è nullo,* il gruppo semi-intrinseco ha questa interessante caratterizzazione: esso *è il più grande sottogruppo del gruppo intrinseco che conservi la connessione interna.* Questa connessione ha le sue *geodetiche* od *autoparallele,* le quali però non sono generalmente *entro* V_n^m anche le *linee di lunghezza minima.* L'A. determina anche il sistema delle « geodetiche di lunghezza minima »: per ogni punto e in ogni direzione escono generalmente infinite di queste linee.

L'A. dà poi alcuni elementi relativi: allo studio di certe *connessioni rigide* di una X_n^m, ritrovando anche risultati di SCHOUTEN e VAN KAMPEN e di SYNGE; alle A_n^m a connessione affine; ai problemi di *equivalenza* e di *applicabilità* di spazi non olónomi. Termina la parte geometrica con un cenno sulle A_n^{n-1} e V_n^{n-1} (*ipersuperficie* anolonome) e in particolare su quelli che dice (col MOISIL) « piani anolonomi, V_3^2 i cui piani tangenti corrispondono ai loro punti di contatto in una *correlazione nulla*.

Seguono interessanti applicazioni e interpretazioni meccaniche: relative ad es. alle trajettorie di un sistema anolonomo senza forze, che sono le geodetiche autoparallele del corrispondente spazio anolonomo; al caso in cui le equazioni del movimento hanno un integrale primo; alla stabilità trigonometrica dell'equilibrio, secondo G. BIRKHOFF: ai sistemi anolonomi S_n^m a vincoli *dipendenti dal tempo*, il cui studio può ridursi a quello di una varietà anolonoma in uno spazio ad $n+1$ dimensioni. Il volumetto termina con un indice bibliografico.

ENEA BORTOLOTTI

S. MANDELBROJT, *Séries lacunaires*; J. FAVARD, *Les théorèmes de la moyenne pour les polynomes*; G. BOULIGAND - G. GIRAUD - P. DÉLENS, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel.* (Actualités scientifiques et industrielles, Paris, Hermann, 1935-36; pp. 40; 52; 80).

Una serie di potenze $\Sigma a_n z^n$ è detta *lacunare* se ammette una infinità di coefficienti a_n uguali allo zero. Poichè la successione dei coefficienti a_n determina la serie $\Sigma a_n z^n$ e quindi, secondo la teoria di WEIERSTRASS, anche tutta la funzione analitica $f(z)$ che ha come elemento $\Sigma a_n z^n$, è chiaro che dallo studio della successione $\{a_n\}$ deve poter dedursi tutto quello che si riferisce alla funzione $f(z)$. Si presenta allora naturalmente la questione di vedere quale è l'influenza delle *lacune* sul comportamento della funzione corrispondente. Hanno avuto così origine delle interessanti ricerche alle quali ha conferito sin dagli inizi una notevole importanza la celebre Tesi di J. HADAMARD, che va considerato appunto come l'iniziatore di questo genere di studi. Ai quali studi hanno poi arrecato molteplici contributi il MANDELDROJT, l'OSTROWSKI, il POLYA, VL. BERNSTEIN, JUNGER ed altri.

Scopo dell'ottima monografia del MANDELBROJT è quello di riassumere i risultati più notevoli che si riferiscono sopratutto all'influenza delle lacune sulla distribuzione dei punti singolari e sulla loro natura, nonchè sulla distribuzione delle cosidette rette di JULIA delle funzioni intere; e la teoria viene esposta non soltanto per le serie di potenze, ma più generalmente per le serie di DIRICHLET.

***

Il classico teorema di ROLLE non è sempre applicabile alle funzioni di variabile complessa, e per ottenerne qualche estensione, valida per valori complessi, è necessario limitarsi alla considerazione di particolari classi di funzioni, fra le quali finora ha formato oggetto dei maggiori studi quella costituita dai polinomi.

Queste ricerche sono state iniziate da GRACE, il quale, giovandosi delle proprietà di cui godono i polinomi apolari, ha stabilito parecchi risultati non solo qualitativi ma anche quantitativi. Altri risultati sono dovuti a SZEGÖ, KAKEYA, BIERNACKI, WALSH, DIEUDONNÉ, ed altri.

D'altra parte la considerazione dei valori complessi permette di ottenere l'inversione del teorema di ROLLE, la quale non è possibile nel campo reale. La prima idea di tale inversione è di POMPEIU, ma a MONTEL è dovuta la maggior parte dei migliori risultati, validi per le funzioni analitiche e ottenuti con semplici considerazioni topologiche; per i polinomi, questi risultati sono stati precisati da ALEXANDER e da KAKEYA.

Passando al campo reale, occorre ricordare che il primo tentativo di giovarsi dei risultati, ottenuti nel campo complesso, per arrecare qualche precisazione al teorema di ROLLE nel campo reale, è dovuto a POMPEIU, ma che il vero iniziatore di queste ricerchè è il MONTEL.

Un nuovo metodo, che non si giova affatto dei risultati ottenuti nel campo complesso, è stato ideato da TCHAKALOFF e modificato ed esteso da FAVARD, il quale è pervenuto a numerosi e brillanti risultati, giovandosi del legame che intercede fra il problema in questione e quello dei momenti di HAMBURGER e facendo uso delle formule delle quadrature meccaniche.

Altri risultati sono dovuti a CARATHÉODORY, SCHOENBERG, OBRECHKOFF, ecc..

Il fascicolo del FAVARD, pregevole per la chiarezza, la precisione e il rigore, rende conto dello stato attuale di queste ricerche, sia nel campo complesso, sia in quello reale, alle quali l'A. ha notevolmenle contribuito in questi ultimi anni.

***

Il problema della derivata obliqua è un problema lineare di valori al contorno, di natura un po' più elevata di quelli di DIRICHLET e di NEUMANN, ed ha per oggetto la determinazione di una funzione U, armonica in un campo aperto Ω, racchiuso da una o più superfici S, e continua in $\Omega + S$, e tale inoltre che in ogni punto Q di S, la derivata della funzione U secondo una direzione assegnata $\overrightarrow{l_Q}$ abbia un valore prefissato $f(Q)$.

Se, in ogni punto di S, $\overrightarrow{l_Q}$ è normale alla superficie S, il problema in questione si riduce a quello di NEUMANN, e, d'altra parte, in un altro notevole caso particolare, esso si riconduce con una quadratura a quello di DIRICHLET.

Il fascicolo in esame è sorto dalla collaborazione di tre geometri francesi, e, se pure soltanto la prima parte, che ha carattere introduttivo, è scritta da BOULIGAND, l'intera monografia risente notevolmente l'influenza di tale Autore.

Nella seconda parte GIRAUD cerca di risolvere il problema nel caso regolare (cioè quando $\overrightarrow{l_Q}$ non è mai tangente ad S), e supponendo inoltre che i coseni direttori di $\overrightarrow{l_Q}$ soddisfino ad una condizione di HÖLDER, con un procedimento, di cui l'analogo è in uso anche per i problemi di DIRICHLET e di NEUMANN, e cioè giovandosi delle proprietà dei potenziali e delle equazioni integrali, ove però compare il valore principale di un integrale improprio. Occorre quindi uno studio preliminare di questi integrali principali e delle relative equazioni di FREDHOLM, fatto recentemente da GIRAUD, il quale, giovandosi di un'idea di BOULIGAND, ha potuto semplificare notevolmente la propria precedente dimostrazione, ed ha provato l'esistenza della soluzione sotto una condizione di compatibilità, necessaria e sufficiente, la quale è la condizione che figura nell'analogo del terzo teorema di FREDHOLM.

La soluzione del problema regolare è unica, come prova BOULIGAND, nella prima parte della monografia, facendo rilevare che, se il problema non è regolare, possono esservi più soluzioni; e ciò risulta facilmente per via geometrica dalla considerazione di speciali congruenze di curve che permettono di ottenere delle soluzioni del problema omogeneo ($f \equiv 0$).

In questo legame, rilevato dal LEVI-CIVITA fin dalla fine del secolo passato, fra la teoria del potenziale e le congruenze equipotenziali, trova la sua ragion d'essere la terza parte del fascicolo nella quale il DELENS riprende lo studio del LEVI-CIVITA, facendone applicazione alla determinazione di soluzioni del problema omogeneo.

SILVIO CINQUINI

Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, editi da FEDERIGO ENRIQUES col concorso di diversi collaboratori. Libri XI-XIII a cura di AMEDEO AGOSTINI. Bologna, Zanichelli, 1936-XIV, pag. 354, L. 30.

Con questo volume (N. 11 della Collezione *Per la storia e la filosofia delle matematiche* diretta da F. ENRIQUES) si compie l'edizione della traduzione italiana degli *Elementi*, intrapresa col n.° 1 della Collezione e continuata coi n.i 8 e 10. Si tratta qui dei libri XI-XIII, e cioè, com'è noto, dei *libri stereometrici*; come pei libri precedenti è adottata la lezione dell'HEIBERG (vol. IV dell'edizione Teubneriana); ma l'AGOSTINI vi apporta il contributo personale di commenti e notizie intorno alle varianti introdotte dai traduttori del rinascimento (COMANDINO, TARTAGLIA, VITALE, CLAVIO, TACQUET, SIMSON, ecc.) e a quelle dei più recenti autori che il testo euclideo si sono proposti di rinnovare piuttosto che di riprodurre; ed anche, ove appare l'opportunità, di osservazioni circa la genuinità della versione accolta. Una interessante *Introduzione* offre uno sguardo sintetico sullo sviluppo storico della geometria solida dando il necessario rilievo ai contributi degli autori del 600-700 (TACQUET, SIMSON, LECCHI) al rinnovamento della struttura logica dei libri XI e XII. In appendice è dato pure un breve riassunto dei cosidetti libri XIV e XV e il volume si chiude con un indice dei nomi citati in esso e negli altri tre di cui si compone l'edizione degli *Elementi*. Notizie interessanti sono esposte nei commenti al libro XII intorno al calcolo di π e al volume della piramide e dei corpi rotondi (1).

In qualche luogo tuttavia ci pare si possa rilevare qualche ineguaglianza nel giudizio d'importanza nella scelta fra l'enorme materiale commentario che naturalmente si presenta; e dobbiamo anche osservare qualche trascuranza nella riproduzione del testo, che potrebbe essere veniale, ma pure non sempre indifferente per la particolare congiuntura che il testo euclideo, non sempre irreprensibile agli occhi del lettore moderno (e appunto perciò argomento di esame critico), non può essere rettificato dal semplice acume di chi legge: citiamo ad es. le parole « *ed uguali* » capitate non si sa come alla fine della def. 9, pag. 26; la forma data alla traduzione della def. 10 la quale finisce con « da un ugual numero di piani simili ed uguali » invece del letterale « *da piani simili ed uguali in numero e grandezza* »: ma più grave è la parola « due » insinuatasi nella penultima riga della pag. 176 (dove devesi leggere « *restino della piramide DEFH piramidi* » invece di « si trovino nella piramide due piramidi »): grave diciamo perchè, evidentemente per una ragione di semplicità grafica, la figura tracciata da EUCLIDE darebbe veramente credito a questo « due »; ma il testo ne riesce deformato (2).

(1) A queste notizie ha contribuito — come avverte l'ENRIQUES — l'ing. ATTILIO FRA[illegible]

(2) Anche [illegible] del LEGENDRE è trascritta con un « due » di [illegible] può essere rilevato subito dal lettore.

È appena necessario ricordare il contenuto dei tre libri dei quali: l'XI costituisce quanto possibile il parallelo stereometrico del I°, culminando nella teoria dell'equivalenza fra i prismi; meriti e difetti di esso paiono rivelare una prevenzione contro l'intuizione spaziale, uno sforzo talora esagerato di riportare i ragionamenti a figure e costruzioni piane; il XII tratta dei problemi di misura che, con somma eleganza, l'antichità risolse col metodo indiretto detto d'esaustione; il XIII dei poliedri regolari.

B. Levi

Th. de Donder: *Thèorie invariantive du Calcul des Variations.* Nouvelle èdition. Vol. IV della Collezione dell'« Institut belge de recherches radioscientifiques ». Paris, Gauthier-Villars, 1936, pp. 230 + XI, fr. 35.

In queste *Lezioni* del de Donder, di cui la presente seconda edizione, notevolmente aumentata è redatta dal sig. J. Gèhènian, il calcolo delle variazioni è veduto secondo un indirizzo essenzialmente formale: e così, volgendosi a considerare la più ampia generalizzazione dei classici integrali del calcolo delle variazioni in cui l'integrando è una qualunque forma differenziale

$$\Sigma A_{\mu_1 \dots \mu_n} d(x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_n}),$$

dove le x^μ sono coordinate di uno spazio ad $N \geq n$ dimensioni e le A sono funzioni assegnate di queste x^μ, di certe y^α, funzioni indeterminate delle x^μ, e di un certo numero di derivate di queste y^α, si calcolano variazioni prime e variazioni superiori, si giunge ad equazioni differenziali e a campi di estremali, si estende la definizione della funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass e il teorema d'indipendenza di Hilbert, si generalizza un classico teorema di Jacobi che riconduce la risoluzione di un sistema hamiltoniano a quella di un'equazione alle derivate parziali.

Non si tratta invece il problema delle condizioni sotto le quali si può affermare l'effettiva esistenza dell'estremo. Ed un'altro elemento occorre mettere in rilievo, il quale accentua l'accennato carattere formale della teoria: si è che, mentre nell'ordinario problema di estremi del calcolo delle variazioni è fatto essenziale che la variabile variazionale è puramente fittizia e tutti gli elementi del problema ne sono indipendenti, qui si suppone al contrario che possano dipenderne esplicitamente le funzioni date $A_{\mu_1 \dots \mu_n}$, si suppone che anche le variabili indipendenti possano subire variazione e si suppone infine che le variazioni infinitesime delle x^μ e delle y^α possono essere funzioni assegnate delle dette x^μ, delle y^α ed anche della variabile variazionale.

Si acquista con ciò chiaramente generalità nelle formole (la quale si estende fino a considerare il caso di più variabili variazionali) mentre qualcosa si perde della loro significanza, che ricompare soltanto colle applicazioni. Di tali applicazioni alla fisica matematica trattano infatti i capitoli XIII, XIV, XVI, XVII dove le equazioni generali del campo gravitazionale, del campo elettromagnetico, della meccanica ondulatoria, della capillarità sono ricondotte alla definizione di campi d'estremali: ma, com'era necessario, le funzioni assegnate diventano indipendenti dalla variabile variazionale, e le variazioni delle funzioni indeterminate diventano libere, mentre in un solo caso le variabili indipendenti subiscono variazione (cap. XIV), uscendo però dal proprio calcolo delle variazioni per passare alla considerazione di un gruppo di trasformazioni secondo LIE.

Su tale indirizzo, in cui si afferma la personalità dell'A., il libro presenta un poderoso insieme di risultati fondamentali.

B. LEVI

FRIEDRICH WAISMANN: *Einführung in das mathematische Denken* mit einem Vorwort von Prof. Dr. KARL MENGER. Wien, Gerold e Co, 1936, pag. 188; RM. 6.

Quest'opera del WAISMANN mira ad esporre ad una larga cerchia di lettori i più importanti problemi logico-filosofici che sono connessi alle cosidette « questioni di principio » della matematica; e vi riesce con tal rigore logico e tale « restlose Klarheit » (come si esprime il MENGER) che può interessare anche i matematici. Cercherò di dare un'idea del metodo del WAISMANN, rilevandone un po' per disteso qualche punto di maggior interesse, tralasciando invece di parlare del piano generale che non presenta nulla di veramente nuovo dal punto di vista matematico.

Il WAISMANN s'intrattiene a lungo sul cosidetto principio di induzione completa e sulle spiegazioni che ne tentarono il POINCARÉ, il FREGE, il RUSSELL: vede però nel « principio » qualcosa di più strettamente formale, che egli cerca di chiarire confrontando l'apparente appello all'infinito che esso contiene colla scrittura di un decimale periodico, ad es. 0,333...: il WAISMANN osserva che questo « non è l'abbreviazione di un numero che non si riesce a scrivere in modo completo per mancanza di inchiostro o di carta, ma è un *nuovo* simbolo il quale possiede le sue ben determinate regole di calcolo (esse pure *finite* come tutte le altre regole dell'aritmetica) ». « Il « salto dal finito all'infinito » è in realtà il passaggio ad un *nuovo* tipo di calcolo, che non è una conseguenza logica dell'antico, ma si connette ad esso in maniera ben determinata ». Così il teorema di aritmetica $a + b = b + a$ (dimostrabile, com'è noto, per induzione completa) « non è un'abbreviazione di infinite eguaglianze che noi, solo a causa della nostra umana debolezza, non siamo in grado di scrivere; e di conseguenza il ragionamento induttivo non è un' abbreviazione di infiniti sillogismi ». Proprio in modo analogo al numero decimale periodico, l'induzione « *inizia* un *nuovo* calcolo affatto indeducibile dalle regole dell'aritmetica elementare. E questo è ciò che conteneva di giusto l'osservazione del POINCARÉ, che il principio di induzione non ha da esser logicamente dimostrato. Esso però non esprime neanche, come pensava il POINCARÉ, un giudizio sintetico a priori » nel senso kantiano di verità intuitiva apodittica, « esso *non contiene in sè alcuna verità, ma è una semplice convenzione*, in base a cui: se la formula $f(x)$ vale per $x = 1$, e se da $f(c)$ segue $f(c+1)$, noi *stabiliamo di dire* che la formula $f(x)$ è dimostrata per *tutti* i numeri naturali ».

Nella discussione delle ormai classiche antinomie degli insiemi, il WAISMANN chiarisce assai bene la loro fondamentale importanza logica, e delinea, in breve ma con tutto rigore, i tratti caratteristici dei diversi metodi (in special modo del formalismo e del logicismo) con cui si cercò di porre un riparo alla crisi da esse provocata. Per suo conto il WAISMANN assume posizione in favore dell'interpretazione formalistico-assiomatica, che egli però ritien necessario completare, determinando in modo chiaro e preciso il rapporto fra il significato che i termini numero, punto, limite, infinito ecc. posseggono nella matematica ed il significato che i medesimi termini posseggono nella lingua comune. È infatti opinione del WAISMANN che il più dei malintesi sorgano proprio dalla confusione di questi due diversi significati.

La ricerca di tale rapporto conduce il nostro A. ad alcune osservazioni che mi sembrano di interesse logico mólto notevole. Prima di tutto lo conduce a determinare i limiti dell'intuizione nella matematica. Dovremo concludere — si domanda il WAISMANN dopo aver esposto ed analizzato distesamente le recenti definizioni di curva, e le teorie (di CANTOR e di DEDEKIND) dei numeri reali — che l'intuizione della nostra vita giornaliera ci trae in inganno perchè non ci suggerisce nulla di simile a quelle proprietà che troviamo per es. nella curva di PEANO? Oppure dovremo, al contrario, concludere che la medesima intuizione riesce a cogliere il vero quando essa ci suggerisce proprio quel concetto del continuo che sta a base della definizione dei numeri reali? Nè l'una nè l'altra cosa: il matematico non si propone infatti di descrivere i rapporti che ci vengono offerti dall'intuizione, nè potrebbe proporselo, dato che la struttura dell'intuizione della nostra vita comune e la struttura dei concetti matematici sono affatto di»erse l'una dall'altra. Esse possono esser parallele, ma non mai identiche; non è quindi da attribuire a colpa nè dell'una nè dell'altra il loro eventuale disaccordo. Anzi è compito del logico mettere bene in luce la loro diversità di struttura dove essa potrebbe sfuggire all'osservatore superficiale. Per es. non si dovrà dire che l'assioma del continuo è giustificato dall'intuizione: ed infatti l'espressione usuale « io vedo in questo tratto di curva infiniti punti » significa solo « *non ha senso dire* che io ne veda *soltanto* dieci o *soltanto* venti »; ma ciò non ha nulla a che vedere con l'infinito della matematica (nè con l'infinito numerabile nè con quello avente la potenza del continuo). « Gli assiomi matematici sono libere creazioni del nostro spirito ».

Ma allora si dovrà concludere che la matematica è un puro giuoco, del tutto analogo al giuoco degli scacchi? Di fronte a questa questione filosofica assai grave, che condusse un logico della tempra del FREGE ad una filosofia quasi platonica, il WAISMANN osserva anzitutto che la sua gravità dipende quasi esclusivamente dalla sua imprecisione. « Se uno di noi dirigesse la propria attenzione solo sulla parte formale dell'aritmetica, se prescindesse in modo completo da ogni applicazione di essa, se tagliasse tutti i fili che la connettono alla nostra lingua comune, allora certamente l'aritmetica non sarebbe altro, per lui, che un semplice gioco. Se noi insegnassimo ad un bambino soltanto tali formule (dell'aritmetica) e nulla in più, gli sfuggirebbe senza dubbio ciò che noi chiamiamo il senso d'insieme *(der Sinn des Ganzes)*. FREGE aveva dunque ragione quando diceva di « veder nell'aritmetica qualcosa di più che un tal gioco formale ». Ma ciò che qui manca non è un processo intuitivo di entità extra-mentali, bensì la spiegazione delle formule stesse. « E questa spiegazione consiste in null'altro che nell'*inserimento del calcolo in un più vasto complesso sintattico.* Se io insegno ad un bambino, oltre alle formule, anche il modo di *tradurre* queste formule nel linguaggio comune, e gli insegno parecchi esempi ove esse trovano applicazione — sfuggirà ancora a lui il vero senso di esse? E farà egli, di quei segni, ancor sempre un uso solo meccanico? ».

Così posto questo problema, risulta ovvio che la sopraddetta determinazione del rapporto preciso fra i termini matematici ed i termini paralleli del linguaggio comune non è, come poteva sembrare a prima vista, una piccola aggiunta del nostro A. al metodo formalistico-assiomatico, ma è una notevole innovazione che muta assai profondamente il significato filosofico del formalismo dello HILBERT. Essa non deve considerarsi, del resto, come una iniziativa, privata e quasi casuale, del WAISMANN ma piuttosto come una parte di quel vasto e sistematico programma, tendente alla costituzione di una « grammatica logica universale », proposto e ormai condotto a buon punto dall'importante scuola filosofica dei neo-positivisti viennesi (SCHLICK, WITTGENSTEIN, CARNAP, FRANK, ecc.) alla quale il WAISMNAN appartiene: scuola di filosofia scientifica il cui metodo, se ricevette finora scarse applicazioni nel campo della matematica, portò già, invece, a notevoli risultati nel campo della fisica e di altre scienze.

L. GEYMONAT

LOUIS DE BROGLIE: *La physique nouvelle et les quanta.* (Bibliothèque de Philosophie scientifique Flammarion). Fr. 15.

Dopo la scoperta del quanto d'azione dovuta al genio di PLANCK, fu riconosciuta l'impossibilità di descrivere i fenomeni del mondo atomico coi concetti della fisica classica. Da ciò è nato un nuovo orientamento del pensiero che ha carattere veramente rivoluzionario, in quanto scalza fin dalle radici quell'insieme di concetti che formavano sino a pochi anni fa la base granitica della nostra scienza.

I fenomeni atomici non s'inquadrano più esattamente nello spazio-tempo, sia pur quello einsteiniano. L'intervento del quanto d'azione richiede una modificazione ben più profonda di quella apportata da EINSTEIN. Lo stato dinamico di una unità fisica elementare apparisce sotto un aspetto indipendente dalla sua localizzazione nello spazio-tempo, ossia come una realtà fisica a sè.

I concetti di corpuscolo e di onda, un tempo così ben distinti, si collegano in guisa da doversi considerare come due aspetti di una medesima cosa ancora del tutto misteriosa: epperò bisogna parlare ora in termini di corpuscoli, ora di onde.

Il classico determinismo è svanito nella fisica atomica e si è dovuto sostituire con le leggi di probabilità in maniera ben diversa da quella usata nella meccanica statistica. Tra i fenomeni non apparisce più quel legame causale conforme allo schema classico, ma solo legami di probabilità; il che porta una profonda modificazione nella nostra concezione delle leggi fisiche.

Tutto ciò è mirabilmente spiegato in questo libro di L. DE BROGLIE; senza dubbio il più bello fra tutti i libri di divulgazione riguardanti la fisica moderna. L'illustre Autore, con stile piano e con una chiarezza e precisione che rispecchiano la lucidità della sua mente, espone le successive rivoluzioni che hanno dovuto subire le teorie fisiche per adattarsi ai nuovi fenomeni che l'esperienza mano a mano svelava, mettendone in rilievo l'assoluta necessità.

E così vediamo comparire e svilupparsi con mirabile coordinazione le teorie di PLANCK, di BOHR, di L. DE BROGLIE, di SCHRÖDINGER, di HEISENBERG ed altri, sino a culminare nella teoria più recente e generale di DIRAC. Tanta è l'arte didattica dell'Autore e la viva sua passione per queste ricerche a cui Egli stesso ha altamente contribuito, che leggendo sembra veramente di assistere a una lotta di titani contro le tenebre onde strappare alla natura i suoi ultimi segreti.

La conclusione è che la nuova fisica segna una svolta decisiva nella storia della scienza, e forse la più profonda che sia mai stata. Ma le tenebre non sono ancora diradate del tutto. Occorrerebbero nuovi concetti che si collegassero asintoticamente con quelli che ci sono abituali nello studio dei fenomeni a grande scala. La nostra mente ne sarà capace? « L'histoire de la science montre l'éxtrême fertilité de l'esprit humain et il ne faut pas désespérer. Cependant, tant que nous ne seront pas parvenu à élagir nos concepts dans le sens indiqué, nous devons nous évertuer à faire entrer, plus on moins gauchement, les phénomènes microscopiques dans le cadre de l'espace et du temps, et nous aurons le sentiment pénible de vouloir enfermer un joyau dans un écrin qui n'est pas fait pour lui ». *p. b.*