Bollettino Unione Matematica Italiana

Oskar Perron

Osservazioni riguardo un teorema di C. Biggeri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.2, p. 82–84.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_2_82_0>

Osservazioni riguardo un teorema di C. Biggeri.

Nota di OSKAR PERRON (a München).

Sunto. - *Si dà una nuova dimostrazione del teorema I pubblicato dal* BIGGERI *nel vol. 15, p. 209, e si dimostra che il teorema II è erroneo.*

In questo « Bollettino » il sig. C. BIGGERI ha dimostrato [1] una interessante generalizzazione del teorema di VIVANTI-DIENES, e per un caso particolare il sig. BEPPO LEVI ha dato una semplificata dimostrazione [2]. Ma il teorema di BIGGERI è senza restrizione una immediata conseguenza di una estensione del cosidetto teorema di VIVANTI dovuta al sig. PRINGSHEIM [3].

(1) Vol. 15, anno 1936, pp. 209-214.

(2) Ibid., pp. 214-215.

(3) « Sitzungsber. der Bayer. Akademie der Wissensch., math.-naturwiss. Abteilung », Jahrgang 1928, pp. 343-358, in particolare pp. 356-357.

Infatti il teorema di BIGGERI è il seguente:

Se il raggio di convergenza della serie di potenze

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(\cos\varphi_n+i\,\mathrm{sen}\,\varphi_n)z^n \tag{1}$$

è l'unità, così che

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1, \tag{2}$$

e se inoltre

$$\cos\varphi_n\geqq 0, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos\varphi_n}=1, \tag{4}$$

allora il punto z = 1 *è singolare per la* f(z).

Modificando un po' le considerazioni del PRINGSHEIM la dimostrazione va così: Se il punto $z=1$ fosse regolare per la funzione $f(z)$, sarebbe anche regolare per la funzione

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(\cos\varphi_n-i\,\mathrm{sen}\,\varphi_n)z^n=\overline{f(\bar z)}$$

e quindi anche per la somma

$$f(z)+\varphi(z)=2\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cos\varphi_n z^n.$$

Ma per questa somma il raggio di convergenza è l'unità, come si vede dalle condizioni (2) e (4), e secondo il teorema di VIVANTI il punto $z=1$ è singolare perchè $\cos\varphi_n\geqq 0$.

Questa dimostrazione non si applica al seguente teorema che il BIGGERI enuncia senza dimostrarlo:

Se σ *è l'ascissa di convergenza della serie di Dirichlet*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(\cos\varphi_n+i\,\mathrm{sen}\,\varphi_n)e^{-\lambda_n z}$$

e se inoltre $\cos\varphi_n\geqq 0$, $\lim\sqrt[n]{\cos\varphi_n}=1$, *allora il punto* z = σ *è singolare per la* f(z).

Ma questo teorema è erroneo. Sia per es.:

$$\lambda_n=\sqrt{n},\qquad a_n=\begin{cases}1 \text{ per } n=\text{numero quadrato } \nu^2,\\ 0 \text{ per gli altri numeri } n,\end{cases}$$

$$\cos\varphi_n=\frac{2}{e^{\sqrt{n}}+e^{-\sqrt{n}}},\qquad \mathrm{sen}\,\varphi_n=(-1)^n\frac{e^{\sqrt{n}}-e^{-\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n}}+e^{-\sqrt{n}}}.$$

Allora si ha

$$\cos\varphi_n=\frac{2-\varepsilon_n}{e^{\sqrt{n}}},\qquad \text{dove } \lim\varepsilon_n=0$$

dunque $\lim \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1$, e la serie di DIRICHLET è la seguente:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e^\nu + e^{-\nu}} + i(-1)^\nu \frac{e^\nu - e^{-\nu}}{e^\nu + e^{-\nu}} \right) e^{-\nu z}.$$

L'ascissa di convergenza è zero, come si vede dalla parte imaginaria; ma il punto $z = 0$ è *regolare*, perchè è regolare per la parte reale

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2}{e^\nu + e^{-\nu}} e^{-\nu z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2}{1 + e^{-2\nu}} e^{-\nu(z+1)},$$

e anche per la parte imaginaria

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{e^\nu - e^{-\nu}}{e^\nu + e^{-\nu}} e^{-\nu z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left(1 - \frac{2e^{-\nu}}{e^\nu + e^{-\nu}}\right) e^{-\nu z} =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-z}} - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{1 + e^{-2\nu}} e^{-\nu(z+2)}.$$

NOTA. — In una lettera a B. LEVI, di cui un estratto sarà pubblicato nel prossimo fascicolo, il prof. C. BIGGERI riconosce l'erroneità dell'enunciato di quest'ultima proposizione dovuta alla dimenticanza della condizione che *la serie di Dirichlet abbia uguali le ascisse di convergenza semplice ed assoluta*, condizione che però compare nell'enunciato pubblicato nei « Comptes Rendus » (t. 204, 4 gennaio 1937). B. L.