Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Sul criterio di integrabilità delle forme differenziali di qualsivoglia grado

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.2, p. 77–82.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_2_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1937.

Sul criterio di integrabilità delle forme differenziali di qualsivoglia grado (*).

Nota di MAURO PICONE (a Roma).

Sunto. - *Si osserva un criterio, necessario e sufficiente, di integrabilità, in un dato campo, di una forma differenziale di qualsivoglia grado, indipendentemente dalla derivabilità parziale dei coefficienti della forma e dall'ordine di connessione del campo.*

Sia A un *campo* (un insieme aperto) dello spazio $S_{(r)}$ a r dimensioni, del quale diremo $x_1, x_2, \dots, x_r$ le coordinate di punto. Supposto A connesso, cioè tale che due qualsivogliano punti di esso possano sempre considerarsi come terminali di una poligonale tutta contenuta in A, è noto che, assegnate n funzioni

$$f_1, \quad f_2, \dots, \quad f_n,$$

continue in ogni punto di A, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione F, differenziabile in ogni punto di A, per la quale si abbia

$$dF = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n,$$

è che, per ogni poligonale Π semplice e chiusa contenuta in A, riesca

$$\int_{\Pi} (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n) = 0.$$

Tale condizione di integrabilità della forma differenziale lineare $\Sigma f_h dx_h$ è dunque affatto indipendente dalla derivabilità delle f_h e dall'ordine di connessione del campo A. In questa piccola nota mi propongo di osservare il seguente teorema che for-

(*) Lavoro eseguito nell'*Istituto per le Applicazioni del Calcolo* del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

nisce un analogo criterio per l'integrabilità delle forme differenziali di qualsivoglia grado:

I numeri interi $h_1, h_2, \dots, h_r$, *positivi o nulli, abbiano per somma* n, *e siano assegnate le* $\binom{r+n-1}{n}$ *funzioni:*

$$f_{h_1h_2\dots h_r}(x_1, x_2, \dots, x_r),$$
$$(h_1 + h_2 + \dots + h_r = n;\ h_1, h_2, \dots, h_r = 0, 1, \dots, n),$$

continue in ogni punto di A. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione* F. *dotata, in ogni punto di* A, *delle derivate parziali, fino a quelle incluse d'ordine* n, *finite e continue, per la quale si abbia*

$$(1)\qquad d^nF = \sum_{\substack{h_1h_2\dots h_r \\ h_1+h_2+\dots+h_r=n}}^{0,\,n} \frac{n!}{h_1!\,h_2!\dots h_r!} f_{h_1h_2\dots h_r}\, dx_1^{h_1} dx_2^{h_2} \dots dx_r^{h_r},$$

è che, per ogni poligonale Π *semplice e chiusa, contenuta in* A, *riescano verificate le* $\binom{r+n-1}{n-1}$ *eguaglianze:*

$$(2)\qquad \int_\Pi \sum_{\substack{s_1s_2\dots s_r \\ s_1+s_2+\dots+s_r=n-p}}^{0,\,n-p} \frac{(n-p)!}{s_1!\,s_2!\dots s_r!} f_{h_1+s_1,\, h_2+s_2, \dots, h_r+s_r}\, d(x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r}) = 0,$$

$$(p = 0, 1, \dots, n-1;\quad h_1 + h_2 + \dots + h_r = p;\quad h_1, h_2, \dots, h_r = 0, 1, \dots, p).$$

Poichè il teorema è vero quando il grado della forma differenziale è *uno*, esso sarà dimostrato se faremo vedere che, suppostolo vero per ogni grado $\leq n$, della forma, lo è pure per il grado $n+1$. Sia dunque, in tale ipotesi, da integrare in A l'equazione differenziale

$$(3)\qquad d^{n+1}F = \sum_{\substack{k_1k_2\dots k_r \\ k_1+k_2+\dots+k_r=n+1}}^{0,\,n+1} \frac{(n+1)!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!} f_{k_1k_2\dots k_r}\, dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_r^{k_r}.$$

Posto, per ciascuna r^{pla} di indici $h_1, h_2, \dots, h_r$, positivi o nulli, di somma n,

$$(4)\qquad \frac{\partial^n F}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2} \dots \partial x_r^{h_r}} = \varphi_{h_1h_2\dots h_r},$$

si trae dalla (3)

$$(5)\qquad d\varphi_{h_1h_2\dots h_r} = f_{h_1+1,\, h_2\dots h_r} dx_1 + f_{h_1,\, h_2+1, \dots, h_r} dx_2 + \dots + f_{h_1, h_2, \dots, h_r+1} dx_r,$$

e condizione necessaria e sufficiente perchè ciò possa aversi è che, per ogni poligonale Π, semplice e chiusa, contenuta in A, sussistano le $\binom{r+n-1}{n}$ eguaglianze:

$$(6) \qquad \int_\Pi (f_{h_1+1, h_2, \dots, h_r} dx_1 + f_{h_1, h_2+1, \dots h_r} dx_2 + \dots + f_{h_1, h_2, \dots, h_r+1} dx_r) = 0,$$

$$(h_1 + h_2 + \dots + h_r = n;\ h_1, h_2, \dots, h_r = 0, 1, \dots, n).$$

Soddisfatte tali condizioni la (3) potrà integrarsi se e solo se potrà integrarsi la seguente

$$d^n F = \sum_{h_1 h_2 \dots h_r}^{0, n} \frac{n!}{h_1! \, h_2! \dots h_r!} \varphi_{h_1 h_2 \dots h_r} dx_1^{h_1} dx_2^{h_2} \dots dx_r^{h_r},$$

cioè, se e solo se, per ogni poligonale Π, riescono verificate le $\binom{r+n-1}{n-1}$ eguaglianze

$$\int_\Pi \sum_{\substack{s_1 s_2 \dots s_r \\ s_1+s_2+\dots+s_r=n-p}}^{0, n-p} \frac{(n-p)!}{s_1! \, s_2! \dots s_r!} \varphi_{h_1+s_1, h_2+s_2, \dots, h_r+s_r} d(x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r}) = 0,$$

$$(p = 0, 1, \dots, n-1;\ h_1 + h_2 + \dots + h_r = p;\ h_1, h_2, \dots, h_r = 0, 1, \dots, p).$$

Ma un'integrazione per parti fornisce

$$\int_\Pi \varphi_{h_1+s_1, h_2+s_2, \dots, h_r+s_r} d(x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r}) = -\int_\Pi x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r} d\varphi_{h_1+s_1, h_2+s_2, \dots, h_r+s}$$

e pertanto, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione differenziale (3) sia integrabile è che, per ogni poligonale Π, siano verificate le

$$\binom{r+n}{n} = \binom{r+n-1}{n} + \binom{r+n-1}{n-1}$$

eguaglianze che si ottengono aggregando alle (6) le seguenti

$$(7) \qquad \int_\Pi \sum_{s_1 s_2 \dots s_r}^{0, n-p} \frac{(n-p)!}{s_1! \, s_2! \dots s_r!} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r} (f_{h_1+s_1+1, h_2+s_2, \dots, h_r+s_r} dx_1 +$$

$$+ f_{h_1+s_1, h_2+s_2+1, \dots, h_r+s_r} dx_2 + \dots + f_{h_1+s_1, h_2+s_2, \dots, h_r+s_r+1} dx_r) = 0,$$

$$(p = 0, 1, \dots, n-1;\ h_1 + h_2 + \dots + h_r = p;\ h_1, h_2, \dots, h_r = 0, 1, \dots, p).$$

In tali ultime eguaglianze figurano i coefficienti

$$(8) \qquad f_{h_1+\sigma_1, h_2+\sigma_2, \dots, h_r+\sigma_r},$$

con $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_r = n - p + 1$. Ora, se $\sigma_1 \geqq 1$, $\sigma_2 \geqq 1, \dots,$ $\sigma_r \geqq 1$, la somma dei fattori del comune coefficiente (8), nella (7), è data da

$$(n-p)!\left(\frac{x_2^{\sigma_2}\dots x_r^{\sigma_r}}{\sigma_2!\dots\sigma_r!}\frac{x_1^{\sigma_1-1}}{(\sigma_1-1)!}dx_1+\frac{x_1^{\sigma_1}\dots x_r^{\sigma_r}}{\sigma_1!\dots\sigma_r!}\frac{x_2^{\sigma_2-1}}{(\sigma_2-1)!}dx_2+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{x_1^{\sigma_1}\dots x_{r-1}^{\sigma_{r-1}}}{\sigma_1!\dots\sigma_{r-1}!}\frac{x_r^{\sigma_r-1}}{(\sigma_r-1)!}dx_r\right)=\frac{1}{n-p+1}\frac{(n-p+1)!}{\sigma_1!\,\sigma_2!\dots\sigma_r!}d(x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_r^{\sigma_r}),$$

se $\sigma_1=0$, $\sigma_2\geqq 1,\dots,\ \sigma_r\geqq 1$, la stessa somma è data da

$$(n-p)!\left(\frac{x_3^{\sigma_3}\dots x_r^{\sigma_r}}{\sigma_3!\dots\sigma_r!}\frac{x_2^{\sigma_2-1}}{(\sigma_2-1)!}dx_2+\dots+\frac{x_2^{\sigma_2}\dots x_{r-1}^{\sigma_{r-1}}}{\sigma_2!\dots\sigma_{r-1}!}\frac{x_r^{\sigma_r-1}}{(\sigma_r-1)!}dx_r\right)=$$

$$=\frac{1}{n-p+1}\frac{(n-p+1)!}{\sigma_2!\dots\sigma_r!}d(x_2^{\sigma_2}\dots x_r^{\sigma_r}),$$

ecc., e pertanto l'eguaglianza (7), moltiplicandone ambo i membri per $n-p+1$, si scrive anche:

$$\int_\Pi \sum_{\substack{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_r\\ \sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_r=n-p+1}}^{0,\,n-p+1}\frac{(n-p+1)!}{\sigma_1!\,\sigma_2!\dots\sigma_r!}f_{h_1+\sigma_1,\,h_2+\sigma_2,\dots,\,h_r+\sigma_r}\,d(x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_r^{\sigma_r})=0.$$

Si ha dunque, come condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità dell'equazione differenziale (3), che, per ogni poligonale Π, devono essere verificate le $\binom{r+n}{n}$ eguaglianze:

$$\int_\Pi \sum_{s_1s_2\dots s_r}^{0,\,n+1-p}\frac{(n+1-p)!}{s_1!\,s_2!\dots s_r!}f_{h_1+s_1,\,h_2+s_2,\dots,\,h_r+s_r}\,d(x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_r^{s_r})=0,$$

$$(p=0,1,\dots,n;\ h_1+h_2+\dots+h_r=p;\ h_1,h_2,\dots,h_r=0,1,\dots,p),$$

ciò che dimostra il teorema.

È altresì facile stabilire che per l'integrabilità della (1) occorre e basta che le eguaglianze (2) siano verificate soltanto per quelle particolari poligonali Π, semplici chiuse e contenute in A, *per le quali ciascun lato è parallelo ad uno degli assi coordinati.* Ci limiteremo ora a considerare tali poligonali, che diremo *rettangolari*, e l'integrazione delle equazioni differenziali, in due variabili indipendenti x e y,

$$d^nF=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}f_h(x,y)dx^h dy^{n-h}. \tag{9}$$

Per ogni poligonale rettangolare Π, semplice e chiusa, contenuta in A, denoteremo con $A_i\Pi$ il campo dei punti interni a Π e con

$$\int_\Pi (fdx+gdy),$$

l'integrale della forma differenziale lineare $fdx + gdy$, esteso a Π, nel verso positivo che a questa compete come frontiera di $A_i\Pi$. Se le f_h sono in A dotate delle derivate parziali del prim'ordine, è, notoriamente, condizione necessaria per l'integrabilità della (9) che si verifichino in A, identicamente, le eguaglianze:

$$(10) \qquad \frac{\partial f_h}{\partial y} = \frac{\partial f_{h+1}}{\partial x}, \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1),$$

le quali possono anche dedursi dalle [cfr. la (6)]

$$\frac{1}{\rho^2}\int_\Pi (f_h dx + f_{h+1} dy) = 0,$$

applicate al contorno Π di un quadrato, contenuto in A, di lato ρ infinitesimo. Ebbene, si può facilmente dimostrare che:

Verificandosi le identità (10), *comunque si assuma in* A, *una poligonale rettangolare* Π, *semplice e chiusa, si ha:*

$$\int_\Pi \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} f_{h+s}(x, y) d(x^{q-s}y^s) = 0,$$
$$(q = 1, 2, \ldots, n;\ h = 0, 1, \ldots, n-q),$$

se $A_i\Pi$ *è contenuto in* A; *comunque si assumano in* A *due sistemi* $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu)$ *e* $(\Pi_1', \Pi_2', \ldots, \Pi'_{\nu'})$ *di poligonali rettangolari, a due a due, quelle di uno stesso sistema, prive di punti interni comuni, si ha:*

$$\sum_{k=1}^{\nu}\int_{\Pi_k} \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} f_{h+s}(x, y) d(x^{q-s}y^s) = \sum_{k=1}^{\nu'}\int_{\Pi_k'} \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} f_{h+s}(x, y) d(x^{q-s}y^s),$$

se, detta FA *la frontiera di* A, *riesce*

$$(A_i\Pi_1 + A_i\Pi_2 + \ldots + A_i\Pi_\nu)\cdot FA = (A_i\Pi_1' + A_i\Pi_2' + \ldots + A_i\Pi'_{\nu'})\cdot FA.$$

Ciò posto, verificandosi le identità (10), ha senso la definizione seguente: Per ogni parte F_iA della frontiera FA di A, per la quale esista un sistema $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu)$ di poligonali rettangolari semplici e chiuse, contenute in A, a due a due prive di punti interni comuni, tali che si abbia

$$(A_i\Pi_1 + A_i\Pi_2 + \ldots + A_i\Pi_\nu)\cdot FA = F_iA,$$

si pone

$$\int_{F_iA} \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} f_{h+s}(x, y) d(x^{q-s}y^s) = \sum_{k=1}^{\nu}\int_{\Pi_k} \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} f_{h+s}(x, y) d(x^{q-s}y^s).$$

Ogni tale parte F_iA di FA si dirà una *parte interna e staccata di FA*. Non è escluso, ovviamente, che F_iA possa ridursi ad un punto. Come corollario del dato criterio di integrabilità della (9) si ottiene, ciò posto, facilmente il teorema:

Supposte verificate in A *le identità* (10), *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione* (9) *sia integrabile in* A *è che per ogni parte* F_iA *interna e staccata di* FA, *siano verificate le* $\frac{n(n+1)}{2}$ *eguaglianze:*

$$\int_{F_iA} \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} f_{h+s}(x, y) d(x^{q-s} y^s) = 0,$$

$$(q = 1, 2, \ldots, n;\ h = 0, 1, \ldots, n - q).$$

Siano $F_i'A$, $F_i''A, \ldots, F_i^{(\mu)}A$, μ determinate parti interne e staccate di FA, e si abbia che: 1°) ciascuna di queste parti è un continuo; 2°) ogni altra parte interna e staccata di FA consiste nella somma di alcune delle μ indicate parti; si ha allora che:

Supposte verificate in A *le identità* (10), *condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (9) *sia integrabile in* A *è che sussistano le* $\mu\frac{n(n+1)}{2}$ *eguaglianze:*

$$\int_{F_i^{(r)}A} \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} f_{h+s}(x, y) d(x^{q-s} y^s) = 0,$$

$$(r = 1, 2, \ldots, \mu;\ q = 1, 2, \ldots, n;\ h = 0, 1, \ldots, n - q).$$