Bollettino Unione Matematica Italiana

Ernesto Pizzetti

Sull'equazione della membrana vibrante per un campo rettangolare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.2, p. 72–77.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_2_72_0>

Sull'equazione della membrana vibrante per un campo rettangolare (*).

Nota di ERNESTO PIZZETTI (a Pisa).

Sunto. - *Nel caso particolare di un rettangolo, sono dimostrati sotto ipotesi meno restrittive e con un metodo diverso i teoremi dati dall'* HAMMERSTEIN *relativamente alla convergenza delle serie di soluzioni particolari dell'equazione della membrana vibrante.*

1. In una memoria del 1928 (1). HAMMERSTEIN ha dimostrato, relativamente alle serie di soluzioni particolari dell' equazione della membrana vibrante, i due seguenti teoremi fondamentali:

a) Nel campo B (ove con B indichiamo il campo ricoperto dalla membrana) siano v_n e λ_n le autofunzioni e gli autovalori dell' equazione differenziale

$$\Delta v + \lambda^2 v = 0 \tag{1}$$

soddisfacenti alla condizione omogenea al contorno

$$v = 0. \tag{2}$$

Supponiamo che le costanti a_n e b_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ siano tali da assicurarci la convergenza delle due serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n{}^6 a_n)^2$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n{}^5 b_n)^2$.

Sotto tali ipotesi la funzione

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \lambda_n t + \frac{b_n}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n t\right) v_n(x, y) \tag{3}$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) A. HAMMERSTEIN: *Ueber Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgabe,* « Mathematische Zeitschrift », Bd. 27, 1928, pagg. 269-311.

rappresenta, per tutti i valori di t, una soluzione dell'equazione differenziale

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \Delta u(x, y, t)$$

che soddisfa alla condizione al contorno $u = 0$.

b) Siano date nel campo B due funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ con derivate parziali continue fino al sesto ordine incluso; si annullino inoltre al contorno di B le funzioni f, g, Δf, Δg, $\Delta^{(2)} f$, $\Delta^{(2)} g$. Allora la serie (3) con

$$(5) \qquad a_n = \iint_B f \cdot v_n d\xi d\eta, \quad b_n = \iint_B g \cdot v_n d\xi d\eta$$

rappresenta una soluzione della (4), che si annulla al contorno e per la quale si verificano le relazioni:

$$(6) \qquad u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = g(x, y).$$

2. In questa nota farò vedere come i teoremi di HAMMERSTEIN, in un caso particolare, siano suscettibili di ulteriori perfezionamenti; e più precisamente dimostrerò tali teoremi sotto ipotesi meno restrittive di quelle poste dall'HAMMERSTEIN e con un metodo più semplice, che sfrutta essenzialmente note disuguaglianze relative ai coefficienti di EULERO-FOURIER di una funzione di due variabili.

Il caso particolare che considero è quello di un campo rettangolare R di lati a e b, con un vertice nell'origine delle coordinate, il lato a sulla direzione positiva dell'asse x, il lato b sulla direzione positiva dell'asse y.

Ricordiamo anzitutto [1] che, quando si considera un tale campo rettangolare, le autofunzioni dell'equazione (1), soddisfacenti alla condizione al contorno (2), sono le funzioni

$$(7) \qquad \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad \text{(ove } m \text{ ed } n \text{ sono due interi positivi)}$$

e gli autovalori del medesimo problema sono:

$$(8) \qquad \lambda_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

[1] V. per es. FRANK von MISES: *Die Differential und Integral-gleichungen der Physik und Mechanik*, Bd. II, IX, § 3.

La serie (3) assume allora la forma:

$$(9') \quad u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + \frac{b_{mn}}{\lambda_{mn}} \operatorname{sen} \lambda_{mn} t\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

coi λ_{mn} dati dalla (8).

3. Il 1° teorema di HAMMERSTEIN ci dà le condizioni alle quali devono soddisfare i coefficienti della serie (3′), affinchè essa rappresenti una soluzione della equazione (4); nel caso particolare in esame, si può ottenere lo stesso risultato sotto ipotesi notevolmente più semplici mediante il seguente

TEOREMA. — *Se sono convergenti le serie*

$$(9) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2_{mn} |a_{mn}|, \qquad \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} |b_{mn}|$$

allora la serie (3′) *converge ed è una soluzione annullantesi al contorno dell'equazione* (4).

Osserviamo anzitutto che gli autovalori definiti dalla (8) sono tutti, ad esclusione di un numero finito di essi, maggiori di uno.

Ciò premesso, scriviamo le serie che si ottengono calcolando le derivate prime e seconde rispetto ad x dei termini della serie (3′):

$$(10) \qquad \Sigma\Sigma \frac{m\pi}{a} \left(a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + \frac{b_{mn}}{\lambda_{mn}} \operatorname{sen} \lambda_{mn} t\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

$$(11) \qquad -\Sigma\Sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + \frac{b_{mn}}{\lambda_{mn}} \operatorname{sen} \lambda_{mn} t\right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Queste due serie sono rispettivamente maggiorate dalle serie:

$$(10') \qquad \Sigma\Sigma \frac{m\pi}{a} \left(|a_{mn}| + \frac{|b_{mn}|}{\lambda_{mn}}\right) = \Sigma\Sigma \frac{m\pi}{a} |a_{mn}| + \Sigma\Sigma \frac{m\pi}{a\lambda_{mn}} |b_{mn}|$$

$$(11') \qquad \Sigma\Sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(|a_{mn}| + \frac{|b_{mn}|}{\lambda_{mn}}\right) = \Sigma\Sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2} |a_{mn}| + \Sigma\Sigma \frac{m^2\pi^2}{a^2\lambda_{mn}} |b_{mn}|$$

convergenti a causa della convergenza delle (9) e dell'espressione (8) di λ_{mn}.

Le serie (10) e (11) sono allora uniformente convergenti: esistono quindi e sono continue le funzioni $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x}$, e si ottengono derivando la (3′) termine a termine. Analogamente si dimostra l'esistenza e la continuità delle funzioni $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Si deduce poi immediatamente dalle espressioni ricavate per $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, che la funzione u definita dalla (3′) soddisfa l'equazione $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e si annulla al contorno.

4. Considerando gli a_{mn} e b_{mn} dati dalle espressioni, analoghe alle (5):

$$
(5') \qquad \begin{cases} a_{mn} = \dfrac{4}{ab} \displaystyle\int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dx dy, \\ b_{mn} = \dfrac{4}{ab} \displaystyle\int_0^a \int_0^b g(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dx dy, \end{cases}
$$

vogliamo ora determinare le condizioni, alle quali devono soddisfare le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ affinchè le serie (9), considerate nel teorema precedente, convergano.

A questo scopo premettiamo il seguente:

LEMMA. — Se le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$, definite nel rettangolo R considerato, ammettono derivate parziali continue del primo e del secondo ordine e si annullano al contorno e se le funzioni $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ sono a variazione doppia finita [1] nel campo rettangolare R, allora i coefficienti a_{mn} e b_{mn} definiti dalle (5′) soddisfano alle disuguaglianze

$$
(12) \qquad |a_{mn}| \leq \frac{k}{m^2 n^2} \qquad |b_{mn}| \leq \frac{k}{m^2 n^2}.
$$

Infatti

$$
a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dx dy = \frac{4}{ab} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dy \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}\, dx
$$

[1] Una funzione $\varphi(x, y)$ si dice, secondo la terminologia del TONELLI, a *variazione doppia finita* nel quadrato $(0, 0; 2\pi, 2\pi)$ se per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse x in parti mediante i punti $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 2\pi$ e per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse y mediante i punti $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 2\pi$ la somma

$$
\Sigma \left| \varphi(x_r, y_s) - \varphi(x_{r+1}, y_s) - \varphi(x_r, y_{s+1}) + \varphi(x_{r+1}, y_{s+1}) \right| \qquad \begin{cases} r = 0, 1, \dots m \\ s = 0, 1, \dots n \end{cases}
$$

resta sempre inferiore ad un numero fisso indipendente dalle suddivisioni considerate. Tali funzioni sono chiamate da VITALI, LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN, funzioni a variazione limitata.

e, ponendo

$$F_m(y) = \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{m\pi} \int_0^b \frac{\partial f}{\partial x} \cos \frac{m\pi x}{a} dx,$$

abbiamo :

$$a_{mn} = \frac{4}{mb\pi} \int_0^b F_m(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{4}{mn\pi^2} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dxdy.$$

Ma abbiamo supposto a variazione doppia finita la funzione $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; allora i suoi coefficienti di EULERO-FOURIER sono almeno dell'ordine di infinitesimo di $\frac{1}{mn}$ (1): risultano quindi verificate le disuguaglianze (12).

5. Dal lemma precedente segue subito il

TEOREMA. — a) *Le funzioni* f(x, y) *e* g(x, y) *ammettano derivate parziali continue fino al quarto ordine.*

b) *Le funzioni* $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$, $\frac{\partial^4 g}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 g}{\partial x \partial y^3}$ *siano a variazione doppia finita.*

c) *Al contorno si annullino le funzioni* f, g, Δf, Δg.

Sotto tali ipotesi convergono le serie

$$(9) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2_{mn} |a_{mn}|, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} |b_{mn}|$$

dove gli a_{mn} *e* b_{mn} *sono dati dalle* (5').

Per la dimostrazione, modifichiamo l'espressione (5') di a_{mn}, tenendo conto dell'equazione $\Delta v + \lambda^2 v = 0$ ed applicando la nota formula di GREEN:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dxdy =$$

$$= - \frac{4}{ab\lambda^2_{mn}} \int_0^a \int_0^b f \Delta \left(\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \right) dxdy =$$

$$= - \frac{4}{ab\lambda^2_{mn}} \int_0^a \int_0^b \Delta f \cdot \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dxdy.$$

(1) Vedi S. FAEDO: *Sulle serie doppie di Fourier*, Tesi di laurea in Matematica, R. Università di Pisa, giugno 1936.

Conseguentemente otteniamo:

$|a_{mn}| \leq \frac{k}{m^2 n^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2_{mn}}$ ed in modo analogo $|b_{mn}| \leq \frac{k}{m^2 n^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{mn}}$.

Le serie (9) sono allora maggiorate dalle serie convergenti $k\Sigma \frac{1}{m^2 n^2}$ e $k\Sigma \frac{1}{m^2 n^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{mn}}$ ed il teorema è dimostrato.