Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Somigliana

Sulle formole classiche di Gauss, Riemann e Stokes

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.2, p. 68–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_2_68_0>

Sulle formole classiche di Gauss, Riemann e Stokes.

Nota di CARLO SOMIGLIANA (a Milano).

Da una lettera al Sig. Prof. UMBERTO CRUDELI.

Sunto. - *Vengono richiamate alcune dimostrazioni poco conosciute delle formole sopracitate.*

Nella sua Noticina: *Inversione delle derivazioni,* pubblicata nel n.° 2, 1936, di questo « Bollettino », Ella richiama la dimostrazione della formola di GAUSS dovuta al MORERA e pubblicata anche nella *Teoria fenomenologica del campo elettro-magnetico* di MAGGI. Ora, come è ben noto, esistono di quella formola molte dimostrazioni pregevoli ciascuna o per semplicità, o per rigore, o per generalità. A me sembra che, didatticamente, la preferibile sia la seguente.

Consideriamo un campo vettoriale S nel quale sia distribuito un vettore A variabile da punto a punto. Definito il flusso A_n del vettore corrispondente ad un elemento superficiale ds, di normale positiva n,

$$A_n ds = A \cos(n, A) ds$$

immaginiamo una divisione del campo S in elementi spaziali dS, mediante piani paralleli ai tre piani coordinati ortogonali, e consideriamo la somma di tutti i flussi attraverso le faccie di tutti questi elementi. È chiaro che questa somma si ridurrà alla somma dei flussi relativamente agli elementi superficiali ds, poichè per tutti gli altri interni se ne avranno due uguali e contrari. Quindi quella somma al limite diviene

$$\int_s A_n ds.$$

Se poi si considerano i flussi relativi a due faccie opposte di un elemento dS, ad es. le due normali all'asse x, essi sono rispettivamente

$$A_x dydz\,; \quad -\left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx\right) dydz,$$

cioè la loro somma è $-\dfrac{\partial A_x}{\partial x} dS$. Così per le altre due coppie di faccie. Si ha quindi immediatamente il teorema della divergenza

$$\int_S \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dS = -\int_s A_n ds.$$

Ricordo di aver trovato questa dimostrazione in qualche trattato di Elettrotecnica. Ora l'ho vista riprodotta nel recente *Lehrbuch der theoretischen Physik* di S. Joos (Leipzig, 1932). Io la davo da molti anni nelle mie lezioni.

Essa ha il vantaggto di essere intuitiva e di non richiedere limitazioni nè per la forma del campo, nè per le funzioni che vi compaiono, all'infuori di quelle che sono necessarie perchè la formola abbia un significato.

Il procedimento indicato può anche servire a trovare con grande facilità l'espressione della divergenza in coordinate curvilinee ortogonali. Se infatti u, v, w sono queste coordinate, e per l'elemento lineare dello spazio si ha

$$ds^2 = U^2du^2 + V^2dv^2 + W^2dw^2,$$

i flussi per due faccie opposte dell'elemento spaziale $u =$ cost., $u + du =$ cost., sono rispettivamente

$$VWA_u dvdw\,; \quad -\left(VWA_u + \frac{\partial(VWA_u)}{\partial u}du\right)dvdw,$$

indicando con A_u, A_v, A_w le componenti del vettore A secondo il triedro delle tangenti alle linee coordinate.

Considerando analogamente le altre due coppie di faccie opposte dell'elemento, ne segue subito

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{UVW}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(VWA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(WUA_v) + \frac{\partial}{\partial w}(UVA_w)\right\},$$

che è la formola ben nota della divergenza.

Per la divergenza superficiale di un vettore tangente ad una superficie (A_u, A_v) si ha similmente per i flussi lineari corrispondenti ai due lati $u =$ cost., $u + du =$ cost., di un elemento superficiale

$$A_u V dv\,; \quad -\left(A_u V + \frac{\partial}{\partial u}(A_u V)du\right)dv.$$

Da qui segue immediatamente per la divergenza superficiale

$$\operatorname{div}_s A = \frac{1}{UV}\left\{\frac{\partial(A_u V)}{\partial u} + \frac{\partial(A_v U)}{\partial v}\right\}.$$

Aggiungerò alle considerazioni precedenti una dimostrazione della formola di STOKES, che ho trovato in un corso di Lezioni sulla *Teoria del magnetismo*, tenute da E. BELTRAMI nel 1882-83 all'Università di Pavia e redatte, con somma cura e diligenza, da uno studente di quel tempo LUIGI BERZOLARI.

Il BELTRAMI parte dalla formola di RIEMANN

$$(1) \qquad \iint_s \left(\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) dudv = \int_l (\varphi du + \psi dv),$$

relativa ad un campo superficiale s di contorno l, quando si interpretino le coordinate curvilinee u, v come i parametri di un sistema cartesiano piano. E considerando un vettore (X, Y, Z) definito pei punti del campo s, pone

$$(2) \qquad \varphi = X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial w}, \quad \psi = X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial w},$$

da cui

$$\varphi du + \psi dv = Xdx + Ydy + Zdz,$$

per spostamenti infinitesimi lungo la superficie.

Ma ricordando lo formole che danno i coseni α, β, γ di direzione della normale

$$\alpha = \frac{1}{UV} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \beta = \frac{1}{UV} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \gamma = \frac{1}{UV} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

si trova subito

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \alpha\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Sostituendo nella (1) si ha il teorema di STOKES

$$\int_s (\text{rot } A \times n) ds = \int_s A_s ds.$$

Questa dimostrazione ha il pregio di mantenere la simmetria rispetto a tutte le coordinate.

Aggiungerò ancora, poichè trattiamo di queste formole elementari di uso così frequente in fisica matematica, una deduzione assai semplice per le componenti in coordinate curvilinee della rotazione di un vettore $A(X, Y, Z)$. Essa però non ha carattere elementare, presupponendo il teorema della riducibilità di un trinomio differenziale alla forma binomia:

$$Xdx + Ydy + Zdz = dF + GdH.$$

Ammessa questa formola, abbiamo subito per la rotazione Ω del vettore $A(X, Y, Z)$

$$\Omega = \text{grad } G \wedge \text{grad } H.$$

Ma in coordinate curvilinee

$$Xdx + Ydy + Zdz = A_u U du + A_v V dv + A_w W dw,$$

mentre grad G e grad H hanno per componenti

$$\frac{1}{U}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial G}{\partial v}, \quad \frac{1}{W}\frac{\partial G}{\partial w}; \quad \frac{1}{U}\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{1}{W}\frac{\partial H}{\partial w}.$$

Si trova così

$$\Omega_u = \frac{1}{VW}\frac{\partial(G, H)}{\partial(v, w)}, \quad \Omega_v = \frac{1}{WU}\frac{\partial(G, H)}{\partial w, u)}, \quad \Omega_w = \frac{1}{UV}\frac{\partial(G, H)}{\partial(u, v)}.$$

Ma

$$A_u U = \frac{\partial F}{\partial u} + G\frac{\partial H}{\partial u}, \text{ ecc.}$$

quindi

$$\Omega_u = \frac{1}{VW}\left\{\frac{\partial(A_w W)}{\partial w} - \frac{\partial(A_v V)}{\partial v}\right\}, \text{ ecc.}$$

che sono le formole solite.

La continua applicazione di tutte queste formole nei corsi di Meccanica e di Fisica matematica e la convenienza di dimostrarle nel modo il più semplice, spero mi giustificherà di averLa intrattenuta su questioni così elementari.