Mario Villa

Alcune osservazioni sugli enti iperalgebrici. Le varietà antinvolutive

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.2, p. 61–68.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_2_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1937.

PICCOLE NOTE

Alcune osservazioni sugli enti iperalgebrici. Le varietà antinvolutive.

Nota di Mario Villa (a Pavia).

Sunto. - *Premesse alcune osservazioni sugli enti iperalgebrici dello spazio complesso e bicomplesso, si considerano le varietà, dello spazio complesso, che l'Autore chiama antinvolutive, e si aggiungono varie proprietà proiettive (e antiproiettive) di queste varietà e, in particolare, delle curve piane algebriche antinvolutive.*

1. Sugli enti iperalgebrici, e sui problemi che ad essi si collegano, sono apparsi ultimamente varî lavori, fra cui recentissima la Memoria dello Spampinato sulle varietà iperalgebriche dello spazio bicomplesso (1). Pure alle varietà iperalgebriche dello spazio bicomplesso è dedicata una mia Memoria che verrà prossimamente pubblicata (2).

Lo studio degli enti iperalgebrici dello spazio bicomplesso offre il vantaggio di eliminare le *questioni di realità* (3), che invece inceppano quando tali enti si studiano nello spazio complesso. E una volta tolte di mezzo le questioni di realità, si procede in queste ricerche speditamente, e appare così forse più tangibile la

(1) *Sulle varietà iperalgebriche del Segre nell' S_r complesso o bicomplesso,* « Mem. dell'Acc. di Torino », tomo 68, p. 191, 1936; vedi anche N. Spampinato, *I punti bicomplessi e le varietà iperalgebriche del Segre,* « Esercit. Mat. del Circ. Mat. di Catania », serie 2ª, vol. 8, 1935. A questi lavori si collega: N. Spampinato, *Teoria delle caratteristiche in un'algebra dotata di modulo ed S_r ipercomplessi,* « Mem. dell'Acc. dei Lincei », serie 6ª, vol. 4, p. 189, 1936.

(2) In tale lavoro modifico anche leggermente la definizione di varietà bicomplessa algebrica posta da Spampinato nella citata Mem. di Torino.

(3) Cioè le questioni che si presentano quando nello studio delle varietà algebriche, a coefficienti reali, si considerano solo i punti reali di queste.

fecondità, più volte affermata nei miei lavori ([4]), di questo campo di studi.

Ma se questa è la ragione che giustifica l'introduzione dello spazio bicomplesso, e se lo studio degli enti iperalgebrici nello spazio bicomplesso ha anche interesse di per sè, specialmente in relazione con la teoria delle algebre, lo studio degli enti iperalgebrici nello spazio complesso conserva un interesse speciale, sia per l'importanza dello stesso spazio complesso, sia perchè in esso si possono considerare le proprietà che nascono dal raffronto degli enti iperalgebrici con gli ordinari enti algebrici, sia infine perchè gli enti iperalgebrici dello spazio bicomplesso sono una generalizzazione di quelli dello spazio complesso.

Si noti poi che le questioni di realità portano a distinzioni le quali costituiscono delle proprietà che non v'è ragione alcuna di trascurare ([5]). Le questioni di realità non hanno insomma solo un aspetto negativo.

Delle proprietà che nascono dal raffronto degli enti iperalgebrici con gli ordinari enti algebrici, come pure dell'aspetto positivo delle questioni di realità, si ha un esempio nei n.[i] seguenti, dove si considerano le varietà dell'ordinario S_r complesso trasformate in sè da un'antinvoluzione dell'S_r stesso, pervenendo a varie proprietà proiettive (e antiproiettive) di esse.

2. Consideriamo in S_r un'antinvoluzione, cioè una antiproiettività (non degenere) involutoria ([6]).

([4]) *Intorno ai fili rettilinei,* « Boll. dell'Unione Mat. Ital. », 1933; *Sulle ipersuperficie iperalgebriche,* « Rend. dell'Acc. dei Lincei », serie 6ª, vol. 19, p. 483, 1934; *Connessi algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima,* « Mem. dell'Acc. d'Italia », vol. 6, p. 151, 1934; *Sulla teoria delle ipersuperficie iperalgebriche,* « Rend. dell'Acc. dei Lincei », serie 6ª, vol. 20, p. 9, 1934; *Sulle curve algebriche piane reali,* « Rend. dell'Ist. Lombardo », vol. 67, p. 577, 1934; *Sulle curve razionali di un'iperquadrica,* « Boll. dell'Unione Mat. Ital. », 1935; *Sulle varietà iperalgebriche semplicemente infinite,* « Boll. dell'Unione Mat. Ital. », 1935; *Sulle singolarità delle ipersuperficie iperalgebriche,* « Rend. dell'Ist. Lombardo », vol. 68, p. 492, 1935; *Sulle reti omoloidiche di pseudoconiche,* « Bollet. dell'Unione Mat. Ital. », 1933; *Sulle trasformazioni pseudocremoniane,* « Rend. Sem. Mat. di Padova », 1933.

([5]) Passando dallo spazio complesso a quello bicomplesso, queste proprietà si perdono, analogamente a quanto avviene passando dallo spazio reale a quello complesso.

([6]) Per la teoria delle antinvoluzioni, vedi: C. Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche,* « Atti dell'Acc. di Torino », vol. 25, pp. 430-457, 1890; E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie Projective Complexe,* Gauthier-

Un ente (una varietà) di S_r si dirà antinvolutivo quando è trasformato in sè da un'antinvoluzione di S_r ([7]).

Rileviamo subito che una proiettività (o antiproiettività) di S_r, qualunque, trasforma una varietà antinvolutiva in una varietà che è ancora antinvolutiva. Si ha insomma che: *l'essere una varietà antinvolutiva costituisce un carattere proiettivo (e antiproiettivo) di essa* ([8]).

Supponiamo che la nostra varietà V sia antinvolutiva in un solo modo, cioè che sia unica l'antinvoluzione π che la trasforma in sè ([9]).

Le antinvoluzioni di S_r sono di due specie, secondo che hanno una catena di punti uniti (1ª specie) o non hanno punti uniti (2ª specie), e questa distinzione dipende da una questione di realità ([10]). Le antinvoluzioni di S_r, quando r è pari, sono sempre di 1ª specie e sono tutte proiettivamente coincidenti.

Quando r è dispari, le antinvoluzioni di S_r di una stessa specie sono tutte proiettivamente identiche, mentre non lo sono mai se sono di specie diverse ([11]). Segue immediatamente che:

Le varietà V di S_r sono di due specie secondo che l'antinvoluzione π è di 1ª o di 2ª specie. (Se r è pari, le V sono sempre di 1ª specie).

Una proiettività (o antiproiettività) di S_r muta una V di 1ª specie (di 2ª specie) ancora in una V di 1ª specie (di 2ª specie).

Quindi: *l'essere una V di 1ª specie (di 2ª specie) costituisce un carattere proiettivo (e antiproiettivo) di essa.*

Supponiamo che la V sia di 1ª specie. Allora l'antinvoluzione π,

Villars, Paris, pp. 124-137, 1931; C. SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, « Math. Annalen », vol. 40, 1892, pp. 429-432.

([7]) Ci riferiamo alle varietà algebriche, ma quanto viene esposto in questo n.° vale anche per le varietà iperalgebriche e più in generale per le varietà analitiche ad un numero qualunque di parametri reali (e quindi, in particolare, a un numero qualunque di parametri complessi).

([8]) Questo carattere non si perde del tutto neppure per una trasformazione cremoniana. Cfr. ([15]).

([9]) Esistono varietà che sono trasformate in sè stesse da varie antinvoluzioni. Vedi nota ([30]).

([10]) Vedi: C. SEGRE, il 2° dei lavori citati, a pie' di p. 432.

([11]) Le equazioni di un'antinvoluzione di 1ª specie, in un opportuno riferimento proiettivo x_i, sono $x_i' = \bar{x}_i$ ($\bar{x}_i$ essendo il numero complesso coniugato di x_i). In S_3 le equazioni di un'antinvoluzione di 2ª specie, in un opportuno riferimento proiettivo, sono

$$x_1' = \bar{x}_2, \quad x_2' = -\bar{x}_1, \quad x_3' = \bar{x}_4, \quad x_4' = -\bar{x}_3;$$

che trasforma in sè V, possiede una catena K di punti uniti. L'intersezione di K con V sarà una varietà la cui dimensione (reale) indicheremo con d. I varî valori che può acquistare d, in corrispondenza di una V di data dimensione, dipendono da una questione di realità ([12]). Ora una proiettività, o antiproiettività, di S_r muta una V per la quale è $d = \rho$ in una V per la quale è ancora $d = \rho$.

Dunque: *Il numero* d, *dimensione reale dell'intersezione di* V *con* K, *è un carattere proiettivo (e antiproiettivo) di* V.

Più in generale: *Tutti i caratteri proiettivi (e antiproiettivi) dell'intersezione di* V *con* K *sono caratteri proiettivi (e antiproiettivi) di* V.

In particolare se $d = 0$, il numero dei punti di cui si compone l'intersezione di V con K è un carattere proiettivo (e antiproiettivo) di V.

Per le curve analitiche di S_r (varietà analitiche ad un parametro complesso), in particolare per le curve algebriche di S_r, deduciamo:

Le curve antinvolutive di S_r, *se* r *è pari, sono di due tipi (proiettivamente e antiproiettivamente distinti) secondo che sono segate dalla catena* K *relativa in un filo* ($d = 1$) *oppure in un numero finito (anche nullo) di punti* ($d = 0$). *Le curve antinvolutive di* S_r, *se* r *è dispari, sono di due specie (proiettivamente e antiproiettivamente distinte) secondo che l'antinvoluzione relativa* π *è di 1ª o di 2ª specie. Quelle di 1ª specie sono poi di due tipi (proiettivamente e antiproiettivamente distinti) secondo che sono segate da* K *in un filo* ($d = 1$) *oppure in un gruppo di punti* ($d = 0$). *Per le curve antinvolutive di 1ª specie, e* r *qualunque, quand'è* $d = 0$, *il numero dei punti di cui si compone l'intersezione di* K *con la curva è un carattere proiettivo (e antiproiettivo) della curva* ([13]).

OSSERVAZIONE Iª. — Una varietà algebrica di S_r rappresentata, in un certo riferimento, da equazioni a coefficienti reali è antinvolutiva *ma sempre antinvolutiva di 1ª specie*. Infatti è trasformata in sè dal coniugio $x_i' = \bar{x}_i$ ([14]).

([12]) In un opportuno riferimento proiettivo, π, essendo di 1ª specie, ha le equazioni $x_i' = \bar{x}_i$. La catena K è, in tale riferimento, il luogo dei punti reali di S_r, aventi cioè coordinate reali. L'intersezione di K con V è quindi, in tale riferimento, la varietà dei punti reali di V.

([13]) Il filo intersezione di una curva algebrica antinvolutiva C di 1ª specie e di 1° tipo con la catena K è d'indice 1 perchè la corrispondenza ad esso congiunta è quella determinata su C da π. Per queste e altre nozioni sui fili iperalgebrici, v.: VILLA, la 7ª delle Note citate ([4]).

([14]) Sarebbe quindi interessante ricercare le varietà antinvolutive di 2ª specie. Ad es., ricercare le curve algebriche dell'S_3 antinvolutive di 2ª specie.

Inversamente una varietà algebrica antinvolutiva di S_r di 1ª specie, in un opportuno riferimento proiettivo, è rappresentata da equazioni a coefficienti reali. Con altre parole, le varietà algebriche antinvolutive di 1ª specie sono quelle proiettivamente equivalenti alle varietà algebriche a coefficienti reali.

Le varietà algebriche rappresentate da equazioni a coefficienti reali sono anche chiamate reali (il che genera equivoci). Perciò il SEVERI propose di chiamarle *autoconiugate.* Si noti che la definizione di antinvolutive, posta in questa Nota, è più generale (perchè comprende anche quelle di 2ª specie) ed è una definizione proiettiva (e antiproiettiva), per proiettività qualunque, non solo cioè per quelle a coefficienti reali ([15]).

OSSERVAZIONE IIª. — Ogni ipersuperficie algebrica di S_r appartiene ad un fascio individuato da due ipersuperficie algebriche antinvolutive di 1ª specie, rispetto alla stessa antinvoluzione di 1ª specie, sicchè il fascio stesso è un ente antinvolutivo di 1ª specie. Infatti se nella equazione di una ipersuperficie algebrica separiamo nei coefficienti, e *non* nelle variabili x_i, la parte reale dall'immaginaria e raccogliamo l'immaginario i che così s'è posto in evidenza, otteniamo $f+i\varphi=0$. E le $f=0$, $\varphi=0$, per l'osservazione precedente sono antinvolutive di 1ª specie rispetto alla antinvoluzione $x_i'=\bar{x}_i$.

3. Le curve piane algebriche antinvolutive ([16]) si possono generare nel modo seguente:

Sia assegnata in un fascio di rette di centro O *una involuzione* I_n^δ *(cioè un sistema lineare* ∞^δ *di gruppi di* n *rette di* O) *e sia assegnata in* I_n^δ *un'antipolarità* Ω *(non degenere). Nel piano del fascio sia infine assegnata un'antinvoluzione* π *(nella quale* O *non sia unito). Nel fascio di rette* O, *facciamo corrispondere ad una retta* t *il gruppo di rette* g *che corrisponde in* Ω *alla involuzione* $\infty^{\delta-1}$

([15]) Una varietà algebrica rappresentata da equazioni a coefficienti reali è sempre proiettivamente particolare perchè è antinvolutiva. Ed è particolare anche dal punto di vista cremoniano (e anticremoniano) perchè la trasformata di essa da tale trasformazione è mutata in sè da una trasformazione anticremoniana, il che costituisce una particolarità.

([16]) Una curva piana algebrica antinvolutiva è sempre di 1ª specie, e quindi è sempre, in un opportuno riferimento proiettivo, autoconiugata (n. 2). In altre parole, le curve piane algebriche antinvolutive sono le trasformate proiettive di quelle autoconiugate. La curva è poi di 1º o 2º tipo secondo che nel suo modello autoconiugato i punti reali formano un filo (curva reale) oppure sono in numero finito.

staccata da t *dalla* I_n^δ ([17]). *Chiamando* O′ *il corrispondente di* O *in* π, *fra i fasci di rette* O, O′, *facendo corrispondere alla retta* t *il gruppo di rette trasformato da* π *del gruppo* g, *nasce una corrispondenza algebrica* γ ([18]).

Ciò posto: *il luogo dei punti in cui le rette di* O *sono incontrate dalle corrispondenti di* O′ *in* γ *è una curva algebrica antinvolutiva, trasformata in sè da* π. *E ogni curva piana algebrica antinvolutiva si può ottenere così* ([19]).

Assegnata uua curva C piana algebrica antinvolutiva, d'ordine n, il precedente punto O è un punto qualunque del piano, purchè non unito nella antinvoluzione π che trasforma in sè la curva ([20]), e una volta scelto O l'involuzione I del fascio O è individuata, ed è pure individuata la Ω in essa, sicchè, in conclusione: scelto O è individuata la generazione precedente di C. Alla stessa generazione di C si perviene partendo invece che da O dal suo corrispondente O' in π. Se O è di multiplicità $s \geq 0$ per C (e quindi anche O' è di multiplicità s per C), insieme con C, s'ottiene però la retta (O, O') contata $n-2s$ volte ([21]). La I è d'ordine $n-s$ ([22]).

([17]) Nel fascio O, facendo corrispondere a t il gruppo g, nasce una corrispondenza iperalgebrica involutoria Γ, di cui I_n^δ è l'involuzione associata e Ω l'antipolarità subordinata [vedi, per queste nozioni, VILLA, il 3° dei lavori citati ([4]), p. 164]. Siccome Γ è una corrispondenza iperalgebrica involutoria qualunque del fascio O, invece di assegnare nel fascio O la I_n^δ, e in I_n^δ la Ω — come s'è fatto nel testo — si può addirittura assegnare in O una corrispondenza iperalgebrica involutoria Γ.

([18]) La γ è una corrispondenza algebrica ***armonica*** a π, perchè il prodotto di γ (considerata come il connesso del piano in cui sono corrispondenti punti appartenenti a rette corrispondenti in γ) e di π è una corrispondenza (iperalgebrica) involutoria.

([19]) La curva C così ottenuta è di 1° o di 2° tipo secondo che le rette di O unite in Γ [cfr. ([17])] formano una V_3 oppure sono in numero finito. (L'insieme delle rette di O unite in Γ si ottiene anche direttamente da I_n^δ e Ω; vedi: VILLA il 3° dei lavori citati ([4]), pp. 161, 171). L'intersezione di C con la catena K dei punti uniti di π fa parte dell'intersezione con C della varietà delle rette di O unite in Γ. [Cfr.: VILLA, i nn. 3, 4 del 7° dei lavori citati ([4])].

([20]) Se C è antinvolutiva in più modi, π è una qualunque delle antinvoluzioni che la trasforma in sè.

([21]) Si ottiene quindi C *esattamente* quando C è d'ordine $2m$ e possiede due punti m^{upli}, corrispondentisi in π, e si considera la generazione relativa ad essi.

([22]) La generazione e le proprietà relative esposte nel testo rientrano, come caso particolare nei risultati generali sulle curve piane algebriche che esporrò in una Nota che verrà prossimamente pubblicata nei « Rend.

Considerando solamente i punti in cui le rette di O sono tagliate dalle corrispondenti sia in γ che in π, si ha, per luogo di essi, l'intersezione di C con la catena K dei punti uniti di π [23].

4. Dalla duplice generazione del n. 3 [24] appare che una curva piana algebrica antinvolutiva è individuata da tre elementi: I_n^{δ}, Ω, π. Se per π si assume il coniugio, la curva che s'ottiene è rappresentata da un'equazione a coefficienti reali. *La generazione del n. 3 fornisce quindi una generazione proiettiva delle curve piane algebriche a coefficienti reali.*

Quando la curva individuata da I_n^{δ}, Ω, π è di 1° tipo [vedi [19]] e π è il coniugio, considerando i punti in cui le rette di O sono tagliate dalle corrispondenti sia in γ che in π [25], si ha, per luogo di essi, una curva reale. Si ottiene così una *generazione proiettiva delle curve piane algebriche reali.*

Se poi per O si prende un punto ciclico del piano (sicchè O' è l'altro punto ciclico del piano) e ad ogni retta per O si sostituisce il punto in cui essa incontra K (cioè il suo punto reale), alla generazione proiettiva precedente subentra la generazione metrica delle curve piane algebriche reali che ho già trovata in un'altra mia Nota [26], e che viene così ritrovata per altra via [27].

del R. Istituto Lombardo ». In essa, assieme ad altre proprietà delle curve piane algebriche antinvolutive, appariranno le dimostrazioni dei risultati enunciati nel testo. Tale Nota mi è stata suggerita dalla mia Nota recente: *Sulle corrispondenze a valenza positiva o nulla* (inserita nel volume: *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, 1936). Dal risultato del n. 8 di quest'ultima Nota, relativo ad una nuova generazione della curva di una corrispondenza fra enti ∞^1 razionali, osservando che la curva antinvolutiva C è la curva della corrispondenza γ, si ricava una nuova generazione di C, mediante due involuzioni, in due fasci di rette, reciproche. Le due involuzioni sono I_n^{δ} e la sua trasformata $\left(I_n^{\delta}\right)'$ da π, e fra le due involuzioni si ottiene la reciprocità R chiamando coniugati un gruppo g di I_n^{δ} e un gruppo g' di $\left(I_n^{\delta}\right)'$ quando g' è il trasformato da π di un gruppo coniugato di g in Ω. *C è il luogo dei punti in cui le rette di* g *tagliano le rette fisse* r *dell'involuzione corrispondente di* g *in* R.

(23) Questo luogo, per la generazione di C esposta in (22), è anche quello dei punti in cui una retta di g taglia la retta che è ad un tempo la sua corrispondente in π e retta r.

(24) Cioè quella esposta nel testo del n. 3 e quella esposta in (22).

(25) Ossia [cfr. (23)] i punti in cui una retta di g taglia la retta che è ad un tempo la sua corrispondente nel coniugio e retta r.

(26) VILLA, il 5° dei lavori citati (4).

(27) Nel mio lavoro preannunciato nella (22) si vedrà come si passa dalla generazione proiettiva a quella metrica, la quale viene così lumeggiata

5. Le curve piane antinvolutive, cioè trasformate in sè da una antiproiettività piana involutoria, appaiono, per la loro definizione, analoghe alle curve piane omologico-armoniche, cioè trasformate in sè da una proiettività piana involutoria (omologia armonica) (28). E godono pure di proprietà analoghe. *La generazione duplice del n. 3 delle curve piane algebriche antinvolutive vale anche per le curve piane algebriche omologico-armoniche, basta sostituire l'antipolarità* Ω *con una polarità e l'antinvoluzione* π *con una omologia armonica* (29). Mercè gli enti iperalgebrici, si è così trovata una parentela fra le curve piane algebriche a coefficienti reali e le curve piane algebriche omologico-armoniche, parentela che mi pare interessante e insospettata (30).

(come pure vengono lumeggiati i caratteri metrici, ad essa relativi, della curva).

(28) Perciò le curve piane antinvolutive si potrebbero anche chiamare *antiarmoniche.*

(29) Vedi: VILLA, la Nota citata del volume: *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, n. 9; VILLA, il lavoro preannunciato in (22).

(30) Nel n. 2, trattando delle varietà antinvolutive, abbiamo supposto che esse fossero antinvolutive in un modo solo. Osserviamo che se una varietà V è antinvolutiva in due modi, quando le due antinvoluzioni sono permutabili (per le antinvoluzioni permutabili, vedi: C. SEGRE, il 1° dei lavori citati: E. CARTAN, loc. cit.), V è trasformata in sè da una proiettività involutoria (prodotto delle due antinvoluzioni). Questo argomento delle varietà più volte antinvolutive suggerisce varie ricerche. Ad es., per le curve piane algebriche più volte antinvolutive si possono fare ricerche analoghe a quelle che si son fatte per le curve piane più volte omologico-armoniche. La ricerca di tali curve non differisce da quella di trovare le curve piane algebriche che, in differenti riferimenti proiettivi, sono rappresentate da equazioni a coefficienti reali. Altrettanto *non* avviene per le curve (o le superficie) più volte antinvolutive dell' S_3 (n. 2, Oss. 1a).