Ettore Bortolotti

Salvatore Pincherle

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **16** (1937), n.2, p. 37–60.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1937_1_16_2_37_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1937.

SALVATORE PINCHERLE

di ETTORE BORTOLOTTI (a Bologna).

Ho accolto l'invito di commemorare SALVATORE PINCHERLE, scienziato e maestro, con reverenza di discepolo, pur sentendomi impari all'alto compito. Altri potrà più degnamente richiamare, con esauriente analisi, la somma di nuove verità di cui Egli ha arricchito il patrimonio scientifico; a me basterà di fermare l'attenzione sul momento storico in cui l'opera Sua si è iniziata, e di accennare ai principî che la informano ed ai contributi di maggior rilievo che essa ha arrecato al progredire della scienza (*).

Egli saliva (1880), non ancora trentenne, a Bologna, la cattedra d'onde LUIGI CREMONA nel 1860 aveva pronunciato quel suo discorso inaugurale, che auspicava l'inizio fra noi della rinascita degli studi matematici. In quel medesimo anno, a Pisa il BETTI ed a Pavia il BRIOSCHI avevano inaugurato i loro corsi di Matematica superiore, ed a Napoli il BATTAGLINI le sue nuove lezioni di Geometria superiore. A quegli studi donava allora singolare attrattiva la brillante fioritura di ricerche sulla *Storia della Matematica*, che ebbe in Italia i suoi maggiori cultori. Le opere del COSSALI, del LIBRI, i poderosi volumi del *Bullettino Boncompagni* rivelavano uno degli aspetti più notevoli della feracità dell'ingegno italiano, anche nelle più elevate regioni dello spirito. L'Italia riacquistava coscienza del posto che a lei spetta nel mondo scientifico, trovava i maestri, fondava le scuole, ed arditamente entrava nell'arengo.

Stava allora assumendo assestamento la « *Teoria delle funzioni* », che è caratteristica della fase odierna nello sviluppo storico della Matematica.

A Berlino il WEIERSTRASS sviluppava la sua *Teoria delle funzioni analitiche*, ed a Parigi l'HERMITE, entrato (1862) nell'insegnamento superiore colla cattedra che per lui era stata creata nella École Normale, gettava nel dominio del pubblico le grandi sco-

(*) Per maggiori notizie biografiche si veda il *Necrologio* pubblicato da L. BERZOLARI nel fascicolo di Ottobre di questo « Bollettino », lo scorso anno.

perte con le quali GAUSS, ABEL, JACOBI, CAUCHY, RIEMANN,.... avevano trasformato la scienza.

Fioriva nella scuola di Pisa la teoria delle *Funzioni di variabili reali*, che ebbe quivi a fondatore il DINI, ed a Pavia il CASORATI svolgeva i suoi corsi sulla Teoria delle funzioni di variabili complesse, ispirati alle idee ed ai metodi che traevano origine dalle ricerche su gli integrali curvilinei del CAUCHY, e dalle dissertazioni del RIEMANN.

Colla venuta a Bologna del PINCHERLE, dell'ARZELÀ, del DONATI, si iniziava una nuova era anche per la scuola matematica bolognese, che, nonostante le sue antiche tradizioni, e la presenza di illustri maestri, quali il CHELINI, il CREMONA, il BELTRAMI,...., solo allora poteva avere completati i corsi necessari alla laurea. Le funzioni di variabile reale furono introdotte nel nostro Studio dall'ARZELÀ, secondo l'indirizzo del DINI, con quel brillante successo che a tutti è noto. La teoria delle funzioni analitiche, secondo il WEIERSTRASS, era nuova per l'Italia, e fu appunto il PINCHERLE che qui per primo la introdusse nel suo insegnamento.

Per naturale disposizione dello spirito e per iniziazione culturale, Egli era portato all'eclettismo. Ebbe la prima iniziazione matematica a Marsiglia, nel Liceo imperiale, dove le classi di Mathématiques élémentaires e di Mathématiques spéciales, comprendevano parte del programma che da noi è svolto nel 1° biennio universitario. Normalista in Pisa (dal 1870 al 1874), quando il DINI stava approntando nei corsi universitari il materiale che poi venne alla luce nei « *Fondamenti* », acquistava, insieme colla padronanza della materia, l'abitudine mentale a quel rigore di metodo, che quel grande maestro sapeva portare nella scuola fin dall'inizio degli studi di analisi, e come base di essi. Ma non minore fu, forse, l'influenza della geniale personalità del BETTI, che fortemente risentiva delle idee e dei metodi promossi dal RIEMANN.

La sua istituzione matematica, già così bene avviata, si compiva felicemente con un anno di perfezionamento — (1877-78) — presso le scuole universitarie di Berlino; quivi ascoltava le lezioni del WEIERSTRASS, e ne portava in Italia le idee, i metodi, le scoperte con una pubblicazione che fu, per il pubblico degli studiosi, una rivelazione.

Fin dai suoi primi saggi appare la tendenza alla generalizzazione ed alla ricerca delle leggi, nella generazione degli enti matematici, per successive trasformazioni, che da elementi semplici e noti danno origine ad altri via via più complicati.

Studiò quelle operazioni, intrinsecamente, o, come Egli diceva, *qualitativamente*: cioè, non in vista della effettiva soluzione di un determinato problema, ma della ricerca delle condizioni essenziali, che effettivamente entrano in gioco nel procedimento risolutivo, e delle classi di problemi in cui tali condizioni sono soddisfatte, e che perciò possono analogamente essere risoluti.

Seppe poi, con intuito felice, ridurre tutte le operazioni che normalmente intervengono nelle teorie analitiche, ad un unico principio: « considerare gli enti matematici come totalità di elementi semplici, e studiare le trasformazioni che quegli enti subiscono per operazioni elementari eseguite su gli elementi onde sono costituiti ».

Nella rappresentazione mediante sviluppi in serie, sono elementi semplici i termini della serie, in quella mediante integrali definiti, la quantità sotto il segno (il differenziale).

Nella teoria delle funzioni analitiche, tutti gli enti che si considerano (funzioni analitiche) si possono ottenere con trasformazioni omografiche da un'unica base, costituita dalle potenze con esponenti interi (positivi, negativi o nullo) della variabile complessa. La totalità delle funzioni analitiche fu perciò concepita dal PINCHERLE come uno spazio lineare ad infinite dimensioni determinato da quella base, e la Teoria delle Funzioni come studio di trasformazioni che operano su gli elementi di quello spazio, alla stregua di operazioni aritmetiche nel campo numerico.

Questa veduta, che costituisce una delle più geniali caratteristiche dell'opera matematica del PINCHERLE, forse risente della tendenza alla *aritmetizzazione*, coltivata nella scuola del WEIERSTRASS.

Ma nel campo funzionale sono punti le funzioni analitiche, ed alla determinazione di ciascun punto occorre una infinità numerabile di coordinate e, nella interpretazione aritmetica, i numeri sono enti idealmente riferiti ad un sistema di numerazione con una infinità numerabile di unità distinte.

La classe delle trasformazioni lineari in tale spazio ha la potenza del continuo.

Al tempo in cui il Nostro pubblicava i suoi primi saggi su tale argomento, l'introduzione di un cosiffatto indirizzo nella analisi matematica era cosa di assoluta novità.

È ben vero che nel « *Calcolo geometrico* » di PEANO (1891), si accenna alla possibilità di sistemi lineari ad infinite dimensioni, e che il VERÒNESE nei suoi « *Fondamenti di Geometria* » (1891), dà idea di uno « *Spazio generale* » del quale lo spazio funzionale del PINCHERLE era una effettiva realizzazione; ma di queste e di altre opere di quell'epoca, che si riattaccano allo stesso ordine di idee, si può tutt'al più dire che esse abbiano richiamato l'attenzione del Nostro ad un più profondo esame sulla natura delle operazioni che Egli aveva già implicitamente introdotto nella analisi.

D'altra parte giova ricordare le vive dispute che in quel tempo fervevano fra matematici e fra matematici e filosofi, intorno alle geometrie a più di tre dimensioni, per avere idea di ciò che allora si poteva pensare di un calcolo funzionale effettivamente operante in uno spazio ad infinite dimensioni.

***

Lo studio dei problemi che si presentano nel « *Calcolo Funzionale* » dal punto di vista del PINCHERLE, non poteva portare a risultati di qualche interesse, senza che fosse limitato il concetto, per sè medesimo troppo arbitrario, di « *Operazione* ». Egli perciò incominciò dallo studio di classi particolari (già assai vaste), ed andò mano a mano ampliando la loro estensione, per due strade diverse:

1°) Generalizzando i procedimenti che dai maestri della scienza erano stati escogitati per lo studio dei casi da essi considerati.

2°) Studiando direttamente, da un punto di vista intrinseco, le classi di operazioni che presentano più diretta e vasta applicazione; e riducendo la risoluzione dei casi già studiati nel quadro di una scienza universale, per quella vastissima classe di operazioni che Egli disse « *Distributive* ».

Come prime basi dell'edificio da costruire, pose lo sviluppo in serie di funzioni analitiche, al modo di WEIERSTRASS, e la rappresentazione mediante integrali curvilinei del CAUCHY.

In relazione con queste due rappresentazioni analitiche introdusse due operazioni fondamentali, che poi vide potersi ridurre ad un unico concetto:

1°) Il prodotto ordinato dei singoli termini di uno sviluppo in serie per gli elementi di una successione ψ_n di funzioni analitiche (o di costanti numeriche) che trasforma ogni funzione $f(x) = \sum_0^\infty \varphi_n(x)$ nella funzione

$$F(x) = \sum_0^\infty \psi_n(x)\varphi_n(x),$$

e questa relazione viene considerata sotto il triplice aspetto:

a) determinazione qualitativa delle classi di funzioni $F(x)$ che corrispondono a determinate classi di funzioni $f(x)$, in relazione colle proprietà formali della operazione eseguita;

b) sviluppo di una data funzione in serie di funzioni analitiche;

c) condizioni di effettiva esistenza funzionale degli enti analitici formalmente ottenuti, e campi di effettiva validità per l'operazione eseguita.

2°) L'operazione caratterizzata da una funzione $\psi(x, y)$ delle due variabili complesse x, y, ed espressa dall'integrale curvilineo

$$F(x) = \int_{(c)} \psi(x, y) \cdot \varphi(y) dy,$$

considerato sotto il triplice aspetto:

a) generazione, per integrazione definita, di nuove classi di funzioni;

b) inversione dell'integrale definito, o come più tardi si disse: risoluzione della *equazione integrale* rappresentata dalla $F(x) = \int_{(c)} \psi(x, y)\varphi(y) dy$, nella quale $\psi(x, y)$ è la funzione caratteristica, $F(x)$ è funzione nota, $\varphi(y)$ è funzione da determinare;

c) condizioni di validità effettiva, per le operazioni considerate.

Ed è quì opportuno il considerare che questa operazione da Lui studiata già nella Memoria (24) pubblicata nel 1886, è quella stessa che più tardi Egli vide poter rappresentare qualsiasi operazione distributiva nello spazio funzionale, e che molti anni dopo formò oggetto della *Teoria delle equazioni integrali.*

È del 1882 uno studio completo del caso che considera gli elementi caratteristici $\psi_n(x)$ come costituenti un sistema di funzioni limitate in un dato campo. Ed in quella Memoria (10), dovendo definire il concetto di funzioni limitate in un dato campo, si premette un Lemma, che comprende come caso particolare il teorema che dodici anni dopo il BOREL enunciava, e che è diventato classico (col nome di BOREL), nella teoria della misura (*).

(*) Eccolo nella forma data dal PINCHERLE: « Se ad ogni punto x di « un campo connesso C e del contorno, corrisponde un valore ed uno solo « di una quantità X (funzione di x nel senso più generale della parola) « e se si può assegnare un tale intorno di x che il limite superiore dei « valori assoluti di X corrispondenti ai punti dell'intorno sia un numero « finito, esisterà un numero N tale che sia in tutto il campo $|X| < N$ », e, nello stesso modo, se il limite inferiore è diverso da zero, « si potrà « assegnare un numero positivo M diverso da zero, tale che per tutto il « campo C sia $|X| > M$ ».

Ed ecco il teorema di BOREL (« Thèse », 1894; « Théorie des Fonctions », 1898): « Si l'on a sur un segment de droite une infinité denombrable « d'intervalles, et si chaque point du segment est intérieur (au sens étroit) « à l'un au moins de ces intervalles, on peut trouver, parmi cette infi-

I risultati di questo primo saggio sono abbastanza cospicui, poichè quivi si dimostra che:

« Se le funzioni φ_n rimangono finite entro un campo connesso J, « e la serie $\Sigma\, \psi_n$ di funzioni ψ_n, regolari entro il campo J, converge « ivi incondizionatamente ed uniformemente, la serie $\Sigma\, \psi_n \varphi_n$ rap« presenta entro tutto il campo J un ramo ad un valore di fun« zione analitica monogena ».

Per quel che riguarda lo sviluppo in serie di funzioni φ_n, Egli considera il caso particolare in cui la funzione caratteristica ha la forma $\psi_n = c_n x^n$, e trova che: Qualunque funzione analitica $F(x)$, regolare nell'intorno del posto $x=0$, è sviluppabile, in un intorno del posto stesso, secondo una serie convergente incondizionatamente ed in egual grado, della forma $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \varphi_n(x)$, purchè le funzioni φ_n siano regolari, diverse da zero per $x=0$, e si mantengano finite per $n=\infty$ in un intorno del posto $x=0$.

Da ciò, in particolare, il noto sviluppo in serie di funzioni di BESSEL.

L'anno seguente (1883) volendo generalizzare i metodi che servivano allo studio di serie procedenti secondo i *polinomi di* LEGENDRE, trovò opportuno premettere una sua generalizzazione della operazione di derivazione, che volle peculiare ad una data successione ψ_n, caratteristica della operazione funzionale da studiare: $F(x) = \Psi(f) = \Sigma\, \psi_n A_n x^n$.

Egli assunse come definizione di *derivata funzionale* l'espressione:

$$DF = D \cdot \Psi \cdot f = \sum_1^\infty \frac{\psi_{n-1}}{\psi_n} \cdot \psi_n A_n x^{n-1} = \sum_0^\infty \psi_n A_{n+1} x^n.$$

Trovò che questa operazione (che si riduce alla derivazione ordi-

« nité d'intervalles un nombre limité d'intervalles jouissant de la même « proprieté ».

La dimostrazione del BOREL scende dal teorema, pur esso ivi dimostrato, che « la somma di un numero finito di quegli intervalli può farsi « maggiore della lunghezza del segmento ».

Dal teorema del PINCHERLE scende infatti che esiste un numero M tale che la lunghezza dell'intervallo entro cui un punto qualunque del segmento può supporsi contenuto, è in tutto il segmento maggiore di M.

Nella « Encyclopédie » (II, 1, 2, p. 128) si dà al teorema il nome di HEINE-BOREL, perchè HEINE nel 1870 ha dimostrato il teorema sulla continuità uniforme, in un dato segmento, delle funzioni di variabile reale, con ragionamento non molto diverso da quello usato dal BOREL.

naria quando $\psi_n = \frac{1}{n!}\Big)$, nel caso generale considerato, conserva le proprietà formali che sono caratteristiche della derivazione, ed ammette come elementi invarianti le serie della forma $\Sigma\psi_n x^n$ che, sotto questo aspetto, sono da onsiderare come costanti numeriche.

Della nuova operazione, così introdotta nel calcolo funzionale, si giova (Memorie (15), (16), (1883–84)) per estendere i procedimenti usati nello studio dello sviluppo di una data funzione in serie di *funzioni sferiche*, al caso generale di sviluppi in serie di funzioni analitiche. Come caso particolare notevole trova che è possibile lo sviluppo procedente secondo le funzioni analitiche $p_n(x)$, quando si possono associare alle date funzioni $p_n(x)$, altrettante funzioni $P_n(y)$, tali che sia $\Sigma p_n(x)P_n(y) = \frac{1}{y-x}$, ed in questo caso considera sistemi di relazioni che rappresentano una prima estensione all'infinito della teoria dei determinanti, risolvendo *sistemi di infinite equazioni lineari con infinite incognite*, e dimostra la possibilità di *sviluppi dello zero* per le funzioni date $p_n(x)$.

Le Memorie dal (24) al (35), pubblicate negli anni 1886–88, studiano le operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti curvilinei della forma:

$$\Psi(x) = A(\varphi) = \int_{(c)} A(x, y)\varphi(y)dy,$$

che comprendono come casi speciali le trasformazioni di Euler, di Laplace, di Abel,.... Dimostra che il problema della *inversione di quegli integrali* racchiude quello dello sviluppo di una data funzione in serie di funzioni analitiche, e considera casi particolari di grande portata.

Ma l'esame di quei casi particolari è preceduto da uno studio fatto dal punto di vista della teoria generale delle operazioni funzionali, indipendente cioè dalla espressione analitica della funzione caratteristica $A(x, y)$ (*nucleo della equazione integrale*, secondo la moderna terminologia). Da quelle considerazioni generali, per speciali particolarizzazioni del nucleo, si deducono risultati relativi a particolari casi interessanti.

Osserva anzitutto che, le operazioni A *permutabili colla derivazione*, trasformano le potenze intere della variabile in polinomi (di Appel) della variabile stessa. Sono cioè particolari omografie nello spazio funzionale (n.° 29).

Se il nucleo ha la forma $A(x, y) = e^{xy}$, si ha la *trasformazione di* Laplace (n.° 29), $\psi(x) = \int_{(c)} e^{xy}\varphi(y)dy$: il Pincherle dimostra che questa, applicata a funzioni algebriche, serve alla generazione di funzioni trascendenti, le quali si dividono in classi, corrispondenti ai varî corpi di funzioni algebriche: le funzioni di una stessa classe sono legate fra loro dalla condizione di soddisfare ad una stessa equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

Se il nucleo ha la forma: $A(x, y) = \Sigma \frac{a_n}{(y-x)^{n+1}}$ (n.i 33, 35) dimostra che la risoluzione della equazione integrale: $f(x) = \int_{(c)} A(x, y)\varphi(y)dy$ comprende quella di un'equazione della forma: $\Sigma h_n \psi_n(x+a_n) = f(x)$, h_n costanti numeriche, e questa equivale alla risoluzione della equazione differenziale con infiniti termini: $\Sigma \frac{a_n}{n!} \psi^{(n)}(x) = f(x)$, la quale ammette in ogni caso una soluzione formale, di immediata costruzione. Ed in tal modo viene stabilito un notevole addentellato fra campi diversi della Analisi.

La Memoria (35), ormai classica, dove è trattato questo argomento, fu tradotta in francese e pubblicata nel vol. 48 degli « Acta Mathematica », del 1926.

Se il nucleo ha la forma: (n.° 28, 1887) $A(x, y) = \Sigma \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}$ e soddisfa ad una equazione a derivate parziali lineare, le funzioni del sistema $A_n(x)$ soddisfano ad una *relazione ricorrente*. La risoluzione della equazione integrale, in questo caso, coincide col problema dello sviluppo di una data funzione in serie procedente secondo le funzioni $A_n(x)$, ed il problema della determinazione degli sviluppi dello zero in serie di funzioni $A_n(x)$ dipende dalla risoluzione di una equazione lineare omogenea di ordine infinito.

La proprietà delle funzioni $A_n(x)$, quivi considerate, di soddisfare ad una *relazione ricorrente*, è comune alle funzioni sferiche, alle cilindriche, ed alle varie generalizzazioni che di queste si sono fatte.

Parve dunque opportuno lo studio intrinseco delle relazioni di ricorrenza, o, in altri termini, delle *equazioni lineari alle differenze finite*. A questo studio il Nostro fu eccitato anche dal fatto che, nel caso più ovvio, delle equazioni alle differenze del secondo ordine, queste hanno per integrali i numeratori ed i denominatori delle frazioni continue, e servono alla rappresentazione approssimata, mediante espressioni razionali, di enti analitici, o di quantità numeriche. Recenti ricerche dell'HERMITE riguardavano il problema di determinare p sistemi di polinomi interi nella variabile x, di grado assegnato, dipendentemente dall'indice n, $A_{1.n}$ $A_{2.n}, \ldots, A_{p.n}$, tali che nelle espressioni $A_{1n}S_1 + A_{2n}S_2 + \ldots + A_{pn}S_p$

(dove S_1, S_2,..., S_p sono serie di potenze della variabile x), i termini contenenti potenze negative di x, abbiano a fattor comune x^{-m}, essendo m l'intero più grande possibile compatibilmente col grado dei polinomi A_{1n}, A_{2n},..., A_{pn}.

L'Hermite aveva trovato che tali polinomi sono integrali di una stessa equazione ricorrente dell'ordine $p+1$, ed aveva proposto al Pincherle lo studio di tali equazioni, in relazione colla risoluzione approssimata del problema dello sviluppo in serie di date funzioni analitiche, che Egli stava studiando.

Il Pincherle subito si impossessò della questione, studiando il problema inverso: Prese come punto di partenza l'equazione ricorrente (alle differenze finite di ordine n), e si propose di stabilire, in relazione con essa, un algoritmo (delle frazioni continue algebriche generalizzate) analogo a quello delle frazioni continue algebriche, in relazione colle equazioni ricorrenti del 2° ordine.

In questo campo tutto era da rifare: incominciando dalle equazioni alle differenze finite, la cui teoria era rimasta allo stato embrionale.

A quei nuovi studi il Pincherle ha dedicato tutta la sua attività scientifica negli anni dal 1889 al 1895: ad essa si riferiscono direttamente, od indirettamente, le Memorie dal n.° 40 al n.° 72, e questo copioso materiale, donde risulta intera e completa una teoria delle equazioni e delle forme alle differenze finite, secondo vedute moderne, e il nuovissimo algoritmo delle *frazioni continue algebriche generali*, si trova, in esposizione sistematicamente ordinata, anche nel ben noto volume: « *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* », che Egli compose, in collaborazione con uno dei suoi più valorosi scolari, nel 1901. Ciò mi esonera dall'entrare in maggiori particolari sopra quell'argomento.

Lo studio delle forme lineari alle differenze rientra in quello più generale delle *operazioni funzionali distributive*; e questo studio Egli riprese con rinnovata energia (dopo aver sistemata la questione delle frazioni continue algebriche generali) nel 1895, con la nota n.° 73, in cui la questione è ripresa da un punto di vista più strettamente sintetico ed intrinseco.

Notevole in questa sua opera la nuova definizione di *derivata funzionale*, espressa dalla formula $A'(\varphi) = A(x\varphi) - xA(\varphi)$ dove A indica l'operazione funzionale ed A' la sua derivata, x è la variabile e φ quella qualsiasi funzione cui l'operazione A si immagina applicata.

Per questa derivata, e per quelle dei varî ordini che immediatamente si ricavano dalla definizione, valgono le ordinarie leggi formali della derivazione, e vale, almeno formalmente, la formula, analoga allo sviluppo di MACLAURIN.

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(1) \frac{\varphi^{(n)}}{n!}, \tag{1}$$

e la formula:

$$A(\alpha\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(\alpha) D^{n}\varphi, \tag{2}$$

analoga allo sviluppo del TAYLOR.

Da queste formule, fondamentali nel calcolo funzionale, risulta che: *se si considera* α *come un elemento fisso, e* φ *come un elemento variabile, ogni operazione distributiva* A, *nello spazio delle serie di potenze, può essere rappresentata con una serie ordinata secondo le potenze del simbolo di derivazione* D. Questo teorema è analogo a quello di CAUCHY, sullo sviluppo di una funzione analitica in una serie ordinata secondo le potenze della variabile.

Egli ha inoltre dimostrato l'*esistenza di un campo funzionale di convergenza,* cioè l'esistenza di una varietà lineare di funzioni φ, per la quale la formula data converge, e la somma della serie rappresenta effettivamente il risultato indicato al primo membro.

Se poi nella formula (2) si sostituisce la derivata colla sua espressione data dal teorema di CAUCHY:

$$D^{(n)}\varphi(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{\varphi(y)dy}{(y-x)^{n+1}},$$

dove (l) è una curva chiusa od aperta situata entro il campo di esistenza delle $\varphi(x)$, si ottiene per l'operazione $A(\varphi)$ una espressione della forma

$$A(\varphi) = \int_{(l)} \psi(xy)\varphi(y)dy.$$

Il problema della *inversione della operazione* A(φ), costituisce il problema della risoluzione delle *equazioni integrali di prima specie.*

Dall'esame delle formule scritte risulta che il problema della *inversione dell'operazione* A, ed in particolare quello della *ricerca delle radici di tale operazione,* si riconduce a quello della *integrazione di una equazione differenziale lineare di ordine infinito.*

Considerando poi le operazioni distributive, che conservano questa proprietà formale anche per somme di infiniti elementi, e sono precisamente quelle che operano nel campo funzionale delle funzioni analitiche, Egli ha trovato che tali operazioni si identificano colle *omografie* in tale spazio, ed ha scoperto che, mentre in tale spazio si conservano le altre proprietà generali delle omografie in uno spazio ad un numero finito, n, di dimensioni, non è così per ciò che riguarda la degenerescenza, che per $n = \infty$ si presenta sotto due forme diverse [(n.° 84), 1897]: si ha una degenerescenza di ***prima specie***, nella quale l'operazione A ammette radici, ma fa corrispondere lo spazio funzionale S a sè medesimo, ed una degenerescenza di ***seconda specie***, nella quale quando α percorre tutti gli elementi di S, $A(\alpha)$ non ne percorre che una parte, di modo che l'equazione $A(\alpha) = \varphi$ non ha soluzioni per certe determinazioni di φ formanti uno spazio lineare contenuto nello spazio S. E questa scoperta potrebbe ben avere nella scienza il nome di Lui.

Le Opere dal n.° 73 al n.° 105 pubblicate negli anni 1895–1900, contengono il materiale, che, raccolto sistematicamente nella ricordata Opera « *Sulle operazioni distributive* », costituisce il fondamento di una nuova teoria, da Lui coltivata con perfetto spirito geometrico, con mirabile magistero, con instancabile, diuturno lavoro.

Fra le applicazioni analitiche che di poi ne fece, riprendendo sotto nuovi punti di vista i problemi fondamentali dello *sviluppo in serie di funzioni analitiche* e dell'*inversione degli integrali definiti*, sono notevoli quelli riguardanti gli *sviluppi in serie di fattoriali* e le *funzioni determinanti.*

Ulteriori progressi nella teoria generale delle operazioni si trovano nella considerazione e nello studio della *iterazione finita ed infinita* di una data operazione. considerata a sua volta come operazione funzionale.

Lo *scarto dalla permutabilità* ha dato luogo ad una nuova definizione di derivata funzionale di una operazione A, considerata in rapporto con una data operazione B.

La nuova definizione $A'(\varphi) = A \cdot B(\varphi) - B \cdot A(\varphi)$ comprende l'antica $A' = A(x \cdot \varphi) - xA(\varphi)$, pel caso speciale che l'operazione B, rispetto alla quale si intende di definire la derivazione, sia la moltiplicazione per la variabile x.

Di questa nuova definizione di derivata, che dà più largo respiro al calcolo funzionale, e di quelle operazioni che il PINCHERLE chiama *normali*, Egli si è occupato anche in questi ultimi tempi, ed ha lasciata inedita una Memoria stampata dopo la sua morte negli « Annali di Matematica ».

La poderosa produzione matematica del PINCHERLE è stata appena toccata in questa rapida scorsa, che potrà solo valere a ricordare l'opera di Lui come creatore di un nuovo interessante ramo di scienza pura. A quell'opera, tipicamente originale, non soccorrevano adeguatamente gli ordinari sussidi analitici; molto c'era da rifare, molto da completare, anche nei primi elementi dell'Analisi, e non c'è ramo di questa scienza dove Egli non abbia lasciato traccia.

E se il più delle volte quelle sue scoperte, quegli arditi suoi indirizzi, troppo tardarono a trovare universale riconoscimento, ciò dipende dal fatto che, nel campo della pura astrazione, le novità, quanto più sono profonde e discoste dalle consuetudini, tanto più tardano ad essere apprezzate nel loro giusto valore. Nel caso del PINCHERLE, bisogna mettere in conto anche la modestia, veramente eccessiva, dell'Uomo, che lo tratteneva, non solo dal proclamare, ma anche semplicemente dall'annunciare la novità e l'importanza dei suoi risultamenti. Non c'è esempio, in tutta la sua vita di scienziato, che Egli abbia mai reclamato la priorità dell'opera sua; e pareva quasi che avesse vergogna di riconoscerla, anche dopo che altri l'aveva segnalata.

Aggiungasi che le Sue opere, per l'altezza e la novità del soggetto, per il simbolismo inusato che Egli fu costretto ad introdurre, per la laboriosità dei calcoli che in molte di esse si richiedevano, erano, al tempo in cui uscirono alla luce, faticose da leggere e difficili da intendere.

Ed è anche da dire che Egli poco si curava della loro diffusione. La maggior parte, senza dubbio la più importante, delle Sue memorie, sono pubblicate negli « Atti » della nostra Accademia. Raccolta gloriosissima, dove è primamente apparso il fiore della produzione matematica italiana, fin dai tempi del CREMONA e del BELTRAMI, raccolta che ha il cambio con gli « Atti » delle più importanti Accademie del Mondo; ma che, con tutto ciò, è poco diffusa negli ambienti matematici.

Dirò tuttavia che l'opera ed il nome del Nostro fin dai suoi primi inizi erano ben conosciuti e pregiati dai matematici di grido, e più dagli stranieri che dai nostrani. Quando fui studente a Parigi (1892-93), mi bastò presentarmi nel nome di Lui, e come suo scolaro, per avere le più cortesi accoglienze da quei maestri. E nomino HERMITE, POINCARÉ, DARBOUX, APPEL, PICARD....

Non ho bisogno di ricordare le onorificenze, che in Italia e fuori gli sono state tributate, ma come bolognese, e come cultore del patrio Studio, mi piace di ricordare che nelle attitudini del Suo pensiero si ripresentarono le più felici qualità degli antichi maestri di scuola bolognese.

La variabile complessa, che Egli costantemente, ed esclusivamente considerava, fu introdotta nella scienza del calcolo da RAFAEL BOMBELLI da Bologna nella seconda metà del '500, ed era ancora considerata con qualche diffidenza al tempo in cui il Nostro inaugurava qui la sua scuola, benchè un altro professore bolognese, VINCENZO RICCATI, avesse mostrato l'esistenza, nel campo reale, della iperbole in cui, con trasformazione complessa, si muta un cerchio immaginario, e da questo fatto fosse poi derivata una *trigonometria iperbolica*, che già era entrata nella pratica, e non solo dei matematici puri.

L'algoritmo delle *frazioni continue*, trovato dal CATALDI sullo scorcio del secolo XVI per la rappresentazione approssimata di irrazionalità quadratiche, è stato da Lui ripreso, generalizzato, reso idoneo alle nuove esigenze dell'Analisi. Ed il metodo generale di trasformazioni da Lui studiato, è, nelle sue lontane origini, quello stesso che servì al CAVALIERI per la sua *Geometria degli indivisibili*.

Dobbiamo dunque esser grati al PINCHERLE, non solo per quel che Egli ha dato di suo alla scienza, onorando la Patria e la Scuola, ma anche per aver ripreso e riallacciato alle moderne, le antiche Glorie del nostro Studio.

Ma somma riconoscenza gli dobbiamo per quel che Egli ha dato alla Scuola ed alla Società come maestro e come educatore.

Chi è stato suo scolaro non può dimenticare il fascino delle sue lezioni. Non solo per l'altezza degli argomenti, per l'impeccabile ordinamento della materia, per la chiarezza cristallina che non lasciava dubbi in nessuno degli ascoltatori, ma per quel senso direi quasi religioso di devozione alla scienza e di rispetto alla scuola, che Egli per primo mostrava e sapeva infondere nei suoi scolari; e per quell'onda di entusiasmo che, pur nella ritenutezza del suo contegno, in Lui traspariva, quando a conclusione di un serrato raziocinio, le verità più ardue apparivano chiare ed evidenti.

Del suo insegnamento ben a ragione fu detto che nel modo migliore raggiungeva il fine più elevato, quello di risvegliare nei giovani il desiderio di sapere, il tormento della ricerca, la gioia della conquista, sia pur piccola, ma nuova e personale.

E con eguale trasporto, col medesimo impegno Egli svolgeva le lezioni che portavano gli allievi dei corsi superiori agli estremi confini raggiunti dalla scienza, e quelli del primo anno di studio, per giovanetti appena usciti dalle scuole medie. Fu Egli stesso ottimo insegnante di scuola media; durante la grande guerra, spontaneamente si profferse per l'insegnamento degli elementi della matematica in un corso tenuto alla Casa del soldato, e lo tenne con quella scrupolosa diligenza, e quella cordiale dedizione al dovere, che Egli poneva in ogni sua azione, con soddisfazione e profitto dei giovani militari, che fin dalla prima lezione avevano capito di aver che fare con un grande maestro.

Ho fino ad ora ricordato solo una delle forme dell'attività di scienziato e di maestro svolta dal PINCHERLE nella sua vita laboriosa. Egli trovava tempo a tutto, ed in ogni cosa poneva tanto fervore, come se di quella sola dovesse aver pensiero. Nè, per qualsiasi motivo, trascurava di dedicare qualche ora del giorno ai suoi studi prediletti. Sono rimasti di Lui 55 Volumi in formato protocollo, manoscritti, dove giornalmente riportava ogni sorta di pensieri scientifici: osservazioni critiche, enunciati, o soluzioni di problemi, schemi, o svolgimenti analitici, programmi di lavoro,...; quei volumi, ora raccolti nel nostro Istituto, che da Lui appunto ha il nome, saranno ricca miniera di ricerche.

Fu autore di ottimi libri di testo. Da mezzo secolo in qua, le generazioni di scolari che si sono susseguite nei banchi scolastici, dalle classi elementari alle universitarie, hanno fatto la loro iniziazione matematica sui *Testi del Pincherle*; libri nei quali la rigorosa sistemazione logica sempre si accompagna con la semplicità e la chiarezza, ed il tono del discorso si accorda colla mentalità dei giovani cui il libro è dedicato.

Se mi rifaccio al tempo in cui esse primamente sono apparse, debbo riconoscere alle *Opere didattiche* del PINCHERLE il grande pregio di aver bandito dalle nostre scuole traduzioni e raffazzonamenti di libri stranieri, che allora tenevano il campo, e di aver inaugurata una produzione nostrana, che sotto ogni rapporto, e specialmente per rigore scientifico, sorpassa i migliori testi stranieri.

Egli fu anche attivissimo membro ed autorevole presidente di Commissioni di esami e di concorsi in ogni ordine di scuole; appartenne al Consiglio di amministrazione della Università, ed al Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione e fu più volte membro della Giunta delle Scuole medie dell'Emilia. In quei delicati uffici l'opera Sua, sorretta da vasta e soda cultura in ogni ramo di scienza, guidata da retti sensi di equanimità e di giustizia, era altamente pregiata, ed ha lasciato traccie benefiche.

***

La fondazione della *Unione Matematica Italiana* e la pubblicazione del « Bollettino », che sotto la Sua direzione ha assunto posto cospicuo fra i periodici matematici, in Italia e fuori, sono meriti suoi preclarissimi. Ma maggiori benemerenze Egli si è acquistato verso la Scienza e verso la Civiltà, nella organizzazione del *Congresso Internazionale dei Matematici* del 1928.

L'Assemblea dei Delegati dei *Comitati matematici*, adunata a Toronto in occasione di quel Congresso Internazionale nel 1924, nominava Lui presidente della *Union Internationale Mathématique*, col mandato di fare un Congresso che fosse *effettivamente internazionale*, cioè senza quelle esclusioni che si erano avute nei precedenti Congressi del dopo guerra a Strasburgo ed a Toronto, e di presentare al *Conseil International des Recherches*, il voto approvato dall'Assemblea, perchè fossero *tolte le limitazioni di natura politica alla partecipazione ai Congressi Matematici Internazionali*.

Ma quel voto contrastava colle direttive del *Segretariato generale della Union Internationale Mathématique*, che, invece di fare le convocazioni e gli inviti, notificava ufficialmente ai Comitati matematici di tutte le Nazioni aderenti al « Conseil International des Recherches » : « *qu'on ne peut plus dire que le Congrès de Bologne est relevant de l'Union Internationale Mathématique* ».

L'organizzazione del Congresso si trovava così come campata in aria..., fra la diffidenza degli uni, e la palese ostilità degli altri.

La soluzione fu trovata col porre il Congresso sotto gli auspici della Università di Bologna, istituzione fuori ed al disopra delle competizioni politiche, per antica fama veramente internazionale, aperta ai dotti di tutto il mondo.

Il gran nome del nostro Studio, l'opera svolta con animo invitto, con fine tatto e con ferma tenacia dal Nostro, che in quella occasione dimostrò qualità egregie di perfetto organizzatore, sortirono esito fortunatissimo. Il nostro Congresso è anche oggi ricordato dagli stranieri (che qui affluirono in gran numero da ogni parte del globo), come uno dei meglio riusciti, anzi, come il migliore fra tutti: ed ha fra tutti il vanto singolarissimo di aver superato la crisi di passaggio dal regime ristretto di esclusioni nazionalistiche, che la guerra aveva lasciato in retaggio ai Congressi matematici, ad un regime di piena indipendenza da ogni ragione politica, quale appunto si conviene alla Scienza, per sua natura essenzialmente universale.

Ma solo coloro che gli furono dappresso, compagni di lavoro e di passione, sanno ciò che quello splendido successo costò a Lui di fatiche, di amarezze, di rinuncie, di sacrifici.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

NOTE E MEMORIE

I periodici citati più frequentemente saranno indicati spesso colle abbreviazioni seguenti:

R. Li. = Rendiconti R. Accademia Lincei.
R. Lo. = Rendiconti R. Istituto Lombardo.
R. Bo. = Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna.
M. Bo. = Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna.
R. Pa. = Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
G. Ba. = Giornale di Matematiche di Battaglini.

1874 - 1. *Sulle superficie di capillarità.* (Nuovo Cimento, Pisa).
1875 - 2. *Sulle costanti di capillarità.* (Nuovo Cimento, Pisa).
1876 - 3. *Sulle superficie d'area minima.* (Progr. R. Liceo Foscolo, Pavia).
» - 4. *Sulle superficie d'area minima.* (Rend. R. Ist. Lombardo).
1877 - 5. *Sulle equazioni algebrico-differenziali.* (Rend. R. Ist. Lombardo).
1878 - 6. *Relazioni fra i coefficienti e le radici di una funzione intera trascendente.* (Rend. R. Ist. Lombardo).
1879 - 7. *Funzioni monodrome aventi un'equazione caratteristica.* (R. Lo.).
» - 8. *Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome.* (Giorn. di Mat. Battaglini, T. 17).
1880 - 9. *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principî di Weierstrass.* (Giorn. Mat. Battaglini, T. 18).
1882 - 10. *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche.* (Mem. R. Accad. Scienze di Bologna, S. IV, T. 3).
» - 11. *Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche.* (Rend. R. Ist. Lombardo).
1883 - 12. *Di una generalizzazione della derivazione nelle funzioni analitiche.* (Giorn. Mat. Battaglini, T. 22).
» - 13. *Un'applicazione delle funzioni sferiche.* (R. Bo.).
» - 14. *Sui prodotti infiniti per funzioni analitiche.* (R. Bo.).
» - 15. *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate dai medesimi.* Mem. 1ª. (Annali di Matematica, S. II, T. 12).
1884 - 16. *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate dai medesimi.* Mem. 2ª. (Annali di Matematica, S. II, T. 12).
» - 17. *Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni.* (Mem. R. Accad. Scienze di Bologna, S. IV, T. 5).
» - 18. *Sui gruppi lineari di funzioni.* (M. Bo., IV, T. 6).
1885 - 19. *Alcune osservazioni generali sui gruppi di funzioni.* (Mem. R. Acc. Scienze di Bologna, S. IV, T. 6).
» - 20. *Sopra una formula di Hermite.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 21. *Note sur une intégrale définie.* (Acta Mathematica, T. 7).
1886 - 22. *Une formule dans la théorie des fonctions.* (Öfversigt af k. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, n.º 6, Stockholm).
» - 23. *Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni alle differenze, e viceversa.* (Rend. R. Ist. Lombardo).
» - 24. *Studi sopra alcune operazioni funzionali.* (M. Bo., IV, T. 7).

1886 - 25. *Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appel.* (R. Li.).
» - 26. *Costruzioni di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari.* (R. Li.).
1887 - 27. *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies.* (Acta Mathematica, T. 10).
» - 28. *Sull'inversione degli integrali definiti.* (Rend. R. Ist. Lombardo).
» - 29. *Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni.* (Mem. R. Accad. Scienze di Bologna, S. IV, T. 8).
1887 - 30. *Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche.* (Rend. R. Accademia Lincei).
1888 - 31. *Sur une généralisation des fonctions eulériennes.* (Comptes Rendus, 23 janvier).
» - 32. *Sopra certi integrali definiti.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 33. *Sulla risoluzione dell'equazione funzionale* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$, *a coefficienti razionali.* (Mem. R. Acc. Sc. di Bologna, S. IV, T. 9).
» - 34. *Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires.* (Crelle's Journal für d. reine u. angew. Mathematik, T. 103).
» - 35. *Sulla risoluzione dell'equazione* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ *a coefficienti costanti.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 36. *Sulla risoluzione dell'equazione funzionale* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$, *a coefficienti costanti.* (Mem. R. Acc. Sc. di Bologna, S. IV, T. 9).
» - 37. *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate.* Note 1ª e 2ª. (R. Li.).
» - 38. *Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie che soddisfano ad equazioni differenziali o alle differenze.* (R. Pa., T. 2).
» - 39. *Una trasformazione di serie.* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, T. 2).
» - 40. *Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes.* (Comptes Rendus, 17 décembre).
1889 - 41. *I sistemi ricorrenti di primo ordine e di secondo grado.* (R. Li.).
» - 42. *Nuove osservazioni sui sistemi ricorrenti di primo ordine e di secondo grado.* (Rend. R. Accademia Lincei).
» - 43. *Quelques applications des fractions continues.* (C. R., 29 avril).
» - 44. *Alcuni teoremi sulle frazioni continue.* (Rend. R. Acc. Lincei).
» - 45. *Sur les fonctions continues algébriques.* (Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, S. III, T. 6, Paris).
» - 46. *Su alcune forme approssimate per la rappresentaoione di funzioni.* (Mem. R. Accad. Scienze di Bologna, S. IV, T. 10).
» - 47. *Di un'estensione dell'algoritmo delle frazioni continue.* (R. Lo.).
1890 - 48. *Su alcuni integrali particolari delle equazioni differenziali lineari non omogenee.* (Rend. R. Accademia Lincei).
» - 49. *Sulla trasformazione di Heine.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. 4).
» - 50. *Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni mediante irrazionali quadratici.* (Rend. R. Istituto Lombardo).
» - 51. *Saggio di una generalizzazione delle funzioni continue algebriche.* (Mem. R. Accad. Scienze di Bologna, S. IV, T. 10).
» - 52. *Un sistema d'integrali ellitici considerati come funzioni dell'invariante assoluto.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei).

1891 - 53. *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* (Annali di Matematica, S. II, T. 19).
» - 54. *Una nuova estensione delle funzioni sferiche.* (M. Bo., V, T. 1).
» - 55. *Sopra certe superficie razionali che s' incontrano in questioni d' analisi.* (Rend. R. Istituto Lombardo).
» - 56. *Sulla generalizzazione delle funzioni sferiche.* (R. Bo.).
» - 57. *Un teorema sulle frazioni continue.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 58. *Sopra una trasformazione nelle equazioni differenziali lineari.* (Rend. R. Istituto Lombardo).
1892 - 59. *Sulle forme differenziali lineari.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 60. *Contributo all' integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti.* (M. Bo., V, T. 2).
» - 61. *Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d' équations différentielles.* (Acta Mathematica, T. 16).
1893 - 62. *Applicazione alla geometria di un' osservazione di aritmetica.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 63. *Sull' interpolazione.* (Mem. R. Acc. Sc. di Bologna, S. V, T. 3).
» - 64. *Sulle serie di potenze.* (Annali di Matematica, S. II, T. 21).
» - 65. *Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di una equazione algebrica.* (Rivista di Matematica, Torino).
» - 66. *Sur les séries de fonctions.* (Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, Coïmbre).
1894 - 67. *Sulle equazioni alle differenze.* Nota 1ª. (Rend. R. Acc. Lincei).
» - 68. *Sulle equazioni alle differenze.* Nota 2ª. (Rend. R. Acc. Lincei).
» - 69. *Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue.* (Mem. R. Accad. Scienze di Bologna, S. V, T. 4).
» - 70. *L' Algebra delle forme lineari alle differenze.* (R. Bo.).
» - 71. *Delle funzioni ipergeometriche, e di varie questioni ad esse attinenti.* (Giorn. Matematiche Battaglini, T. 32).
» - 72. *L' Algebra delle forme lineari alle differenze.* (M. Bo., V, T. 5).
1895 - 73. *Sulle operazioni funzionali distributive.* (Rend. R. Acc. Lincei).
» - 74. *Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data.* (Rend. R. Accad. Scienze di Torino).
» - 75. *Sulle soluzioni coniugate nelle equazioni differenziali e alle differenze.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 76. *Sopra alcune equazioni simboliche.* (Mem. R. Acc. Sc. di Bologna).
1896 - 77. *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 78. *Sullo spirito aritmetico nella Matematica. Traduzione di un opuscolo di F. Klein.* (Rend. Circ. Matem. di Palermo, T. 10).
» - 79. *Le operazioni distributive e le omografie.* (R. Lo.).
» - 80. *Operazioni distributive: l' integrazione successiva.* (R. Li.).
» - 81. *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 82. *Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions.* (Mathematical papers, International mathematical Congress, Chicago).

1896 - 83. *Sulle equazioni differenziali lineari non omogenee.* (R. Bo.).
1897 - 84. *Cenno sulla geometria dello spazio funzionale.* (R. Bo.).
» - 85. *Commemorazione di C. Weierstrass.* (R. Bo.).
» - 86. *Sulle serie procedenti secondo le derivate successive di una funzione.* (Rend. Circ. Matem. di Palermo, T. 11).
» - 87. *Sulla generalizzazione del determinante wronskiano.* (Rend. R. Accademia Lincei).
» - 88. *Appunti di calcolo funzionale distributivo.* (R. Lo.).
» - 89. *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif.* (Mathematische Annalen, T. 49).
1898 - 90. *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 91. *Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 92. *Di un'estensione del concetto di divisibilità per un polinomio.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 93. *Sull'operazione aggiunta.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 94. *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 95. *Sur la transformée d'Euler.* (Crelle's Jour. für Mathem., T. 119).
1899 - 96. *Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives.* (Bibliotheca Mathematica, Stockholm).
» - 97. *Sur les séries de puissances toujours divergentes.* (C. R., 13 fevrier).
» - 98. *Di un'equazione funzionale simbolica e di alcune sue conseguenze.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 99. *A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard.* (R. Bo.).
» - 100. *Sulle singolarità di una funzione composta con due funzioni date.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 101. *Sopra un problema d'interpolazione.* (R. Pa., T. 14).
1900 - 102. *Commemorazione di E. Beltrami.* (Rend. R. Acc. Sc. di Bologna).
» - 103. *Sulla continuità delle funzioni.* (Rend. R. Acc. Sc. di Bologna).
» - 104. *Sulla scomposizione di una forma differenziale lineare in un prodotto di operazioni.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 105. *Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica.* (Annali di Matematica, S. III, T. 4).
1901 - 106. *Commemorazione di Ch. Hermite.* (Rend. R. Acc. Sc. di Bologna).
» - 107. *La trasformazione di Laplace e le serie divergenti.* (R. Bo.).
1902 - 108. *Sulle serie di fattoriali.* Nota 1ª. (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 109. *Sulle serie di fattoriali.* Nota 2ª. (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 110. *Sulle derivate ad indice qualunque.* (M. Bo., V, T. 9).
» - 111. *Alcune formule di analisi combinatoria.* (G. Ba., T. 40).
1903 - 112. *Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 113. *Sopra un'estensione della formula di Taylor nel calcolo delle operazioni.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 114. *Sur l'approximation des fonctions par des irrationnelles quadratiques.* (Comptes Rendus, 9 novembre).

1903 - 115. *Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali.* (R. Li.).
» - 116. *Sulle funzioni meromorfe.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 117. *Sur une série d'Abel.* (Acta Mathematica, T. 28).
1904 - 118. *Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 119. *Sugli sviluppi asintotici e le serie sommabili.* (R. Li.).
» - 120. *Risoluzione di una classe di equazioni funzionali.* (R. Pa., T. 18).
1905 - 121. *Sur les fonctions déterminantes.* (Annales Scientifiques de l'Éc. Normale Supérieure, S. III, T. 22).
» - 122. *Studio sopra un teorema di Poincaré relativo alle equazioni ricorrenti.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
1906 - 123. *Sulle equazioni funzionali lineari.* (M. Bo., VI, T. 3).
» - 124. *Funktionaloperationen und -gleichungen.* (Encyklopädie der math. Wissenschaften, T. II_1, H. 6).
» - 125. *Sulle equazioni funzionali lineari.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 126. *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* (Rend. R. Accad. Lincei).
1907 - 127. *Sull'inversione analitica degli integrali definiti.* (R. Bo.).
» - 128. *Sull'inversione degli integrali definiti.* (Mem. della Soc. Italiana delle Scienze, detta dei XL, S. III, T. 15).
» - 129. *Sopra l'estensione agli sviluppi asintotici di un teorema del sig. Hurwitz.* (Rend. R. Accad. Lincei).
1908 - 130. *Sulla teoria dei limiti.* (Periodico di Matematica).
» - 131. *Sui fasci di omografie.* (Rend. R. Istituto Lombardo).
» - 132. *Commemorazione di F. Ruffini.* (Rend. R. Acc. Sc. di Bologna).
» - 133. *Spigolature nel campo delle funzioni determinanti.* (Atti del Congresso Internazionale di Matematica, Roma).
1909 - 134. *Alcune osservazioni sulle funzioni determinanti.* (R. Bo.).
» - 135. *Sopra certe equazioni integrali.* (Rend. R. Accad. Lincei).
1910 - 136. *Sul concetto di divisibilità in generale.* (R. Bo.).
1911 - 137. *Sopra un'estensione del concetto di divisibilità.* (G. Ba., T. 48).
» - 138. *Sopra alcune omografie dello spazio funzionale.* (R. Li.).
» - 139. *Sugli studi per la laurea in matematica e sulla Sezione delle Scuole di Magistero.* (Commissione internazionale per l'insegnamento matematico, Genova).
» - 140. *Appunti di Calcolo funzionale.* (M. Bo., VI, T. 8).
1912 - 141. *Lo spazio funzionale e le sue omografie.* (Giorn. di Matem., T. 50).
» - 142. *Alcune osservazioni sopra i sistemi di funzioni associate e sopra un gruppo di operazioni lineari.* (M. Bo., VI, T. 9).
» - 143. *Équations et opérations fonctionnelles.* (Encyclopédie des Sciences Mathématiques, T. II, Paris-Leipzig).
» - 144. Recensione dell'opera: *Theorie der linearen Differenzengleichungen* di WALLENBERG e GULDBERG. (Bollettino di Bibliografia matematica, Genova).
» - 145. *Commemorazione di C. Arzelà.* (Rend. R. Acc. Sc. di Bologna).
» - 146. *Sulle operazioni lineari, e sulla teoria delle equazioni integrali.* (Rend. R. Accademia Lincei).

1912 - 147. *Quelques remarques sur les fonctions déterminantes.* (Acta Mathematica, T. 36).
1913 - 148. *Sull'operazione aggiunta di Lagrange.* (Ann. Mat., S. III. T. 21).
» - 149. *Alcune osservazioni alla Memoria: « Appunti di Calcolo funzionale.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 150. *Un'applicazione della convergenza in media.* (R. Li.).
» - 151. *Sulle serie di fattoriali generalizzate.* (R. Pa., T. 37).
1914 - 152. *Alcune osservazioni sull'iterata di una funzione data.* (R. Bo.).
1915 - 153. *La Matematica e il futuro.* Discorso inaugurale. (Annuario della R. Università di Bologna).
1916 - 154. *Il Calcolo delle probabilità e l'intuizione.* (Rivista « Scientia », Milano).
» - 155. *Sopra alcuni nuclei analitici.* (R. Bo.).
1917 - 156. *Appunti su alcuni problemi d'iterazione.* (R. Bo.).
1918 - 157. *Sulle catene di radicali quadratici.* (R. Bo.).
» - 158. *Sulle catene di radicali quadratici.* (Rend. R. Acc. Sc. di Torino).
» - 159. *Sulle radici reali delle equazioni iterate di un'equazione quadratica.* (Rend. R. Accademia Lincei).
» - 160. *La crisi della Scuola media.* (Rivista pedagogica, Roma).
1919 - 161. *Commemorazione di U. Dini.* (Periodico di Matematica).
» - 162. *Commemorazione di Eugenio Elia Levi.* (Seminario Matematico dell'Università di Roma).
» - 163. *Sull'iterazione della funzione* $x^2 - a$. (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 164. *Un teorema sull'iterazione della funzione quadratica.* (R. Bo.).
1920 - 165. *Sull'iterata di un polinomio razionale intero.* (R. Bo.).
» - 166. *L'iterazione completa di* $x^2 - 2$. (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 167. *Sulla funzione iterata di una razionale intera.* Nota 1ª. (Rend. R. Accademia Lincei).
» - 168. *Sulla funzione iterata di una razionale intera.* Nota 2ª. (Rend. R. Accademia Lincei).
» - 169. *Sopra alcune equazioni funzionali.* (Rend. R. Accad. Lincei).
» - 170. *Sobra la itéracion analitica.* (Rivista matematica hispano-americana, Madrid).
1921 - 171. *Sulla preparazione degli insegnanti.* (Riv. pedagogica, Roma).
» - 172. *Commemorazione di A. Razzaboni.* (R. Bo.).
» - 173. *Un'interpretazione geometrica ed un'estensione della divisibilità.* (Periodico di Matematica).
» - 174. - *Sur une équation intégrale dans le domaine complexe.* (Comptes Rendus, 6 juin).
» - 175. *Spigolature nel campo del Calcolo funzionale.* (Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze).
1922 - 176. *Struttura di uno spazio invariante nella teoria delle operazioni lineari.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).
» - 177. Recensione dell'opera: *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* di E. LANDAU. (Boll. Unione Matematica Italiana).
» - 178. *Sulle operazioni lineari permutabili colla derivazione.* (R. Bo.).

1923 - 179. *Operazioni funzionali permutabili colla derivazione.* (Bollettino dell'Unione Matematica Italiana).

1924 - 180. Recensione dell'opera: *Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen* di H. W. E. JUNG. (Boll. Un. Mat. Ital.).

» - 181. *Sulle funzioni trascendenti semplici.* (Rend. R. Accad. Lincei).

» - 182. *Ancora sulle funzioni trascendenti semplici.* (R. Li.).

» - 183. *Su una separazione di singolarità in una funzione analitica.* (Rend. R. Accademia Lincei).

» - 184. *Sulla generalizzazione di alcune trascendenti classiche.* (R. Bo.).

1925 - 185. *Relazione del Presidente dell'Accademia di Bologna nella cerimonia solenne regale del 12 Giugno 1925.* (Supplemento alle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna).

» - 186. *Di alcune trasformazioni funzionali.* (Rend. R. Accad. Lincei).

1926 - 187. *Notice sur les travaux de S. Pincherle.* (Acta Mathematica).

» - 188. *Sur la résolution de l'équation fonctionnelle* $\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$. (Acta Mathematica, T. 48).

» - 189. *Sulle serie di potenze negative di una variabile.* (R. Bo.).

» - 190. *Il calcolo delle differenze finite.* (Boll. Unione Matemat. Ital.).

1927 - 191. *Una classe speciale di forme differenziali lineari d'ordine infinito.* (Rend. R. Accademia Scienze di Bologna).

1928 - 192. Recensione dell'opera: *Leçons sur les familles normales* di P. MONTEL. (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 193. *Sulle operazioni funzionali lineari.* (Conferenza al Congresso Internazionale dei Matematici di Toronto, Canadà).

» - 194. *Discorso d'apertura del Congresso Internazionale dei Matematici,* Bologna.

» - 195. Recensione dell'opera: *Les espaces abstrait* di M. FRÉCHET. (Bollettino dell'Unione Matematica Italiana).

1929 - 196. Recensione dell'opera: *Leçons sur l'intégration.* di H. LEBESGUE, 2ª ediz. (Boll. dell'Unione Matematica Italiana).

» - 197. Recensione dell'opera: *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies* di N. E. NÖRLUND. (Boll. Un. Mat. Ital.).

» - 198. *Operazioni funzionali lineari e sviluppi dello zero.* (R. Li.).

» - 199. *Una generalizzazione della divisibilità algebrica.* (Rend. del Seminario Matematico di Milano).

» - 200. *Commemorazione di Francesco Brioschi.* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL).

» - 201. *Sopra un'estensione del concetto di divisibilità.* (Rend. del Seminario Matematico di Milano).

» - 202. *Osservazioni sulla trasformazione di Euler-Lindelöf.* (R. Bo.).

1930 - 203. Recensione dell'opera: *Darstellung und Begründung einiger neueren Ergebnisse der Funktionentheorie* di E. LANDAU. (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 204. *Sui coefficienti di fattoriali.* (Annali di Matematica, S. IV, T. VII).

» - 205. *Sulle serie ordinate per potenze successive dell'integrazione.* (Rend. R. Accademia Scienze di Bologna).

1930 - 206. *Osservazione sopra una classe di operazioni lineari.* (Atti Congresso Internazionale Matematici, T. III, Bologna).

1931 - 207. Recensione dell'opera: *Integralgleichungen* di G. Kowalewski. (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 208. *Sullo scarto della permutabilità nelle operazioni lineari.* (R. Bo.).

» - 209. *Sopra uno speciale operatore lineare.* (R. Li., Note I, II, III).

» - 210. *Le funzioni analitiche da un punto di vista elementare.* (Enciclopedia Matem. Elementare, Vol. I, Parte II).

» - 211. *Sulla permutabilità negli operatori lineari.* (Atti Società Italiana per il Progresso delle Scienze).

1932 - 212. *Commemorazione di Giuseppe Vitali.* (Rend. R. Accad. Lincei).

» - 213. *Un'applicazione del metodo simbolico.* (Bollettino Unione Matematica Italiana).

» - 214. Recensione dell'opera: *Leçons sur les fonctions entières.* di P. Montel. (Boll. Unione Matematica Italiana).

1933 - 215. *Generalizzazione della teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.* (Mem. R. Acc. Scienze di Bologna).

» - 216. *Operatori normali di rango uno nello spazio delle serie di potenze.* (Rend. R. Accademia Scienze di Bologna).

» - 217. *Operatori lineari a coefficienti di fattoriali.* (R. Bo.).

» - 218. *Sulla iterazione della operazione* xD. (Boll. Un. Mat. Ital.).

1934 - 219. Recensione dell'opera: *Theorie of Matrices* di Mac Duffee. (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 220. *Su una decomposizione in fattori degli operatori normali.* (Rend. R. Accademia Scienze di Bologna).

» - 221. *Alcune osservazioni sugli operatori normali nello spazio delle serie di potenze.* (Rend. R. Accad. Scienze di Bologna).

» - 222. Recensione dell'opera: *Topologie I* di C. Kuratowski. (Boll. Unione Matematica Italiana).

1935 - 223. *Una generalizzazione del concetto di divisibilità.* (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 224. Recensione dell'opera: *Enzyclopädie der Elementar Mathematik* di Weber-Wellstein. (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 225. Recensioni di alcuni fascicoli della Collezione Hermann: *Exposés de mathèmatiques* di P. Dubreil, R. Brauer e J. von Neumann. (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 226. Recensioni delle opere: *Cours de Géometrie,* T. II, di R. Estéve et H. Mitault; *Leçons d'algèbre et de Géométrie* di R. Garnier. (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 227. *Le dilatazioni nello spazio di potenze.* (Annali di Matematica, S. IV, T. XIV).

1936 - 228. Recensioni delle opere: *Interpolation and Approximation by rational Functions in the complex domain* di J. L. Walsh; *General Analysis* di E. H. Moore; *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions* di S. Mandelbrojt. (Bollettino Unione Matematica Italiana).

» - 229. *Un operatore normale e la divisibilità.* (R. Bo.).

1936 - 230. *Sulla permutabilità negli operatori lineari.* (Boll. Unione Matematica Italiana).

» - 231. *Contributo alla teoria degli operatori lineari.* (Annali di Matematica, S. IV, T. XV).

» - 232. *Alcune osservazioni sulle serie di potenze del simbolo di derivazione.* (Scritti matematici offerti a LUIGI BERZOLARI).

MANUALI HOEPLI (Milano).

233. *Algebra elementare.*
234. *Geometria pura elementare.*
235. *Geometria metrica e geometria.*
236. *Esercizi sull'Algebra elementare.*
237. *Esercizi di geometria elementare.*
238. *Algebra complementare: Analisi algebrica.*
239. *Algebra complementare: Teoria delle equazioni.*

EDIZIONI ZANICHELLI (Bologna).

240. *Lezioni di Algebra elementare.*
241. *Elementi della Aritmetica.*
242. *Lezioni di Algebra complementare:* I. *Analisi algebrica.* - II. *Teoria delle equazioni.*
243. *Lezioni di Calcolo iafinitesimale.*
244. *Le operazioni distributive* (in collaborazione con U. AMALDI).
245. *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche.*