BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Virgilio Giulotto

Sopra un sistema di relazioni ricorrenti al quale soddisfano le funzioni cilindriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.1, p. 1–4.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

PICCOLE NOTE

Sopra un sistema di relazioni ricorrenti al quale soddisfano le funzioni cilindriche.

Nota di VIRGILIO GIULOTTO (a Bergamo).

Sunto. - *Si dimostra che un noto sistema di relazioni ricorrenti, al quale soddisfano le funzioni cilindriche di prima specie, definisce il complesso di dette funzioni e può servire da punto di partenza per lo sviluppo di tutta la teoria.*

Le funzioni cilindriche o di BESSEL a indice n intero (positivo o negativo) s'introducono in meccanica celeste come coefficienti delle potenze di z nello sviluppo in serie convergente della funzione:

$$Z = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \tag{1}$$

nella quale e indica la base dei logaritmi neperiani e x e z rappresentano due numeri qualunque reali o immaginari.

Sviluppate in serie le funzioni $e^{\frac{x}{2}z}$, $e^{-\frac{x}{2}z^{-1}}$ si ottiene per Z lo sviluppo seguente:

$$Z = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s}}{\pi(r)\cdot\pi(s)} z^{r-s}. \tag{2}$$

Poichè l'espressione:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n \tag{3}$$

non cambia scambiando z con $-\frac{1}{z}$, si deduce facilmente la relazione:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

che permette di limitare lo studio alle $J_n(x)$ con n positivo.

Posto nella (2)

$$r = s + n$$

si trova per il coefficiente di z^n in Z, vale a dire per la $J_n(x)$, l'espressione seguente:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{\pi(s)\,\pi(n+s)} . \tag{4}$$

E poichè la serie a secondo membro è convergente per ogni valore di x, come si può verificare applicando il criterio di CAUCHY, la (4) determina, in tutto il piano, la funzione cilindrica o di BESSEL, di prima specie e d'indice n intero.

Mi propongo di dimostrare che il sistema delle seguenti note relazioni ricorrenti:

$$\begin{cases} \dfrac{dJ_n(x)}{dx} = \dfrac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \\[2ex] \dfrac{dJ_n(x)}{dx} = \dfrac{1}{2}(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) \end{cases} \tag{5}$$

definisce tutto il complesso delle funzioni cilindriche di prima specie e d'indice intero.

Poichè le funzioni di BESSEL, come è noto e come si può verificare tenendo conto della (4), soddisfano alle (5), sarà dimostrato il nostro asserto quando avremo provato che reciprocamente se una funzione $u_n(x)$ soddisfa al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{du_n(x)}{dx} = \dfrac{n}{x} u_n(x) - u_{n+1}(x) \\[2ex] \dfrac{du_n(x)}{dx} = \dfrac{1}{2}(u_{n-1}(x) - u_{n+1}(x)), \end{cases} \tag{6}$$

essa, salvo un fattore numerico, è una funzione cilindrica.

Per questo proponiamoci di determinare la funzione $V(x, z)$ più generale che, svlluppata in serie secondo le potenze di z, dia, nei coefficienti dello sviluppo, funzioni soddisfacenti al sistema (6).

Poniamo:

$$V(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x) z^n \tag{7}$$

e supponiamo, per un momento, convergenti in ugual grado la serie a secondo membro e le serie delle derivate parziali rispetto ad x ed a z.

Si ottiene dalla (7):

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{\partial u_n(x)}{\partial x} z^n \\ \dfrac{\partial V(x, z)}{\partial z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n u_n(x) z^{n-1} \end{cases}$$

e per le relazioni (6), alle quali per ipotesi soddisfano le funzioni $u_n(x)$, si deducono le uguaglianze:

$$\frac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{n}{x} u_n(x) - u_{n+1}(x)\right] z^n$$

$$\frac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [u_{n-1}(x) - u_{n+1}(x)] z^n$$

ossia le seguenti:

$$\frac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \frac{z}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n u_n(x) z^{n-1} - \frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{n+1}(x) z^{n+1}$$

$$\frac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \frac{z}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{n-1}(x) z^{n-1} - \frac{1}{2z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{n+1}(x) z^{n+1},$$

e queste, per la (7) e la seconda delle (8), danno luogo al seguente sistema alle derivate parziali

$$\frac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \frac{z}{x} \frac{\partial V(x, z)}{\partial z} - \frac{1}{z} V(x, z)$$

$$\frac{\partial V(x, z)}{\partial x} = \frac{z}{2} V(x, z) - \frac{1}{2z} V(x, z)$$

che ci proponiamo di integrare.

Eliminando $\dfrac{\partial V(x, z)}{\partial x}$, si ottiene il sistema equivalente:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} \lg V(x, z) = \dfrac{x}{2} \dfrac{z^2 + 1}{z^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \lg V(x, z) = \dfrac{z^2 - 1}{2z} \end{cases}$$

che, come si vede facilmente, è integrabile essendo soddisfatta la relazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2} \frac{z^2 + 1}{z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^2 - 1}{2z}\right) = 0.$$

Integrando la seconda equazione di detto sistema si ha:

$$\lg V(x, z) = \frac{z^2 - 1}{2z} x + \varphi(z) \tag{10}$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione arbitraria di z.

Sostituendo la (10) nella prima delle (9) si ricava:

$$\varphi'(z) = 0$$

e di conseguenza, indicando con K una costante qualunque, si ottiene:

$$\lg V(x, z) = \frac{z^2 - 1}{2z} x + K$$

e quindi:

$$V(x, z) = Ce^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

dove C è una costante arbitraria.

Le condizioni precedentemente imposte alla $V(x, z)$ e alle sue derivate parziali rispetto alle variabili sono soddisfatte, e poichè d'altra parte per $C = 1$ la funzione $V(x, z)$ coincide con la Z definita dalla (1), resta provato che il sistema (4) definisce il complesso delle funzioni cilindriche di prima specie d'indice intero e può servire come punto di partenza per lo sviluppo di tutta la teoria.