Bollettino
Unione Matematica
Italiana

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Giuseppe Scorza Dragoni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 292–293.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_292_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI: *Sul fondamento matematico della teoria degli invarianti adiabatici* (in corso di stampa negli « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XIII, fasc. 3-4).

Secondo un teorema di BIRKHOFF, se la varietà V, analitica, semplice, chiusa, $(n-1)$-dimensionale e priva di singolarità, è una varietà di equazione $H(x_1, \ldots, x_n) = \text{cost.}$, dove H è un integrale primo del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

le funzioni $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ essendo olomorfe in ogni punto di V, e se il gruppo G di trasformazioni $T(t)$, che il sistema (1) subordina su V, ammette un invariante integrale positivo; allora, per quasi tutti i punti P di V, esiste per $\tau \rightarrow +\infty$ il limite di

$$J(P, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(P(t)) dt,$$

dove $P(t)$ è l'immagine di P nella $T(t)$ ed $f(P)$ è una funzione misurabile e limitata (o semplicemente sommabile) su V.

Il limite in discorso è quasi ovunque uguale ad

$$\alpha = \frac{1}{mV} \int_V f(P) dV,$$

se ogni porzione misurabile di V, invariante rispetto a G, ha misura, o nulla, o uguale a quella, mV, di V; se, cioè, G è metricamente transitivo.

Il LEVI-CIVITA pone a fondamento di una sua esposizione della teoria degli invarianti adiabatici una formula ispirata dalle considerazioni precedenti. Egli, per evitare le peculiarità delle singole traiettorie dei diversi punti di V, considera una opportuna sottovarietà $(n-2)$-dimensionale, γ, di V e, posto Γ_τ uguale all'insieme descritto dalle trasformate di γ nelle $T(t)$ per $0 \leq t \leq \tau$ $(\tau > 0)$, considera l'espressione

$$I(\gamma, \tau) = \frac{1}{m\Gamma_\tau} \int_{\Gamma_\tau} f(P) dV,$$

e sostituisce la media temporale $J(P, \tau)$ con la media spaziale $I(\gamma, \tau)$, ammettendo che anche per il $\lim_{\tau \to +\infty} I(\gamma, \tau)$ valgano proprietà analoghe a quelle note per il $\lim_{\tau \to +\infty} J(P, \tau)$.

In una Nota dell'A. lo studio del comportamento asintotico di $I(\gamma, \tau)$ è ricondotto a quello di $J(P, \tau)$ mediante riduzioni di integrali multipli. Rimane aperta la questione di studiare direttamente il comportamento di $I(\gamma, \tau)$ per $\tau \to +\infty$.

Nella Memoria, di cui le righe presenti sono un riassunto, viene data una risposta a quest'ultimo problema nell'ipotesi che ogni trasformazione di G, distinta dalla trasformazione identica $T(0)$, sia essa stessa metricamente transitiva; o, più generalmente, che una almeno delle trasformazioni di G sia transitiva in senso metrico.

La $\lim_{\tau \to +\infty} I(\gamma, \tau) = \alpha$ si ottiene allora applicando a Γ_τ (che, per τ sufficientemente piccolo e sotto ipotesi opportune per γ, è a punti tutti semplici) il seguente teorema:

Se f(P) *è una funzione sommabile su* V, *se* B *è una porzione misurabile di* V *e* B(t) *ne è l'immagine nella* T(t), *allora la funzione di* t

$$\int_{B(t)} f(P) dV$$

è continua, e, posto

$$F(B, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \int_{B(t)} f(P) dV,$$

riesce

$$\lim_{\tau \to +\infty} F(B, \tau) = \alpha, \tag{2}$$

sempre che G *soddisfaccia alle ipotesi dichiarate*, del quale teorema viene anche data una dimostrazione, che non fa ricorso al risultato di Birkhoff.

La dimostrazione in discorso si deve presumibilmente poter completare in modo da giustificare la (2), senza naturalmente ricorrere al teorema di Birkhoff, anche se G è solo metricamente transitivo.

Ciò formerà oggetto di un eventuale lavoro ulteriore.