
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TULLIO VIOLA

Sull'accumulazione dei valori delle
funzioni olomorfe di due variabili,
che formano una successione
uniformemente convergente

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 13 (1934), n.5, p. 288–291.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_288_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_288_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull'accumulazione dei valori delle funzioni olomorfe di due variabili, che formano una successione uniformemente convergente.

Nota di T. VIOLA (a Torino).

Sunto. - *Si studia la distribuzione dei punti nei quali le funzioni olomorfe di due variabili $f_n(zz')$, che formano una successione uniformemente convergente, assumono gli stessi valori della funzione limite $f(zz')$.*

1. Sia $|f_n(zz')|$ ($n=1, 2, \dots$) una successione di funzioni olomorfe, uniformemente convergente in uno stesso dominio (D) a quattro dimensioni. Sia $f(zz')$ la funzione limite e sia (D_0) un dominio completamente interno a (D), cioè tale che tutti i suoi punti, anche quelli del contorno, siano interni a (D).

Vogliamo studiare i punti di (D) nei quali le funzioni $f_n(zz')$, da un certo valore dell'indice n in poi, assumono i valori che $f(zz')$ assume in (D_0) ⁽¹⁾.

(1) Per il problema analogo, relativo alle successioni di funzioni di una sola variabile, vedi VIOLA, *Sur l'accumulation des valeurs des fonctions analytiques qui forment une suite uniformément convergente*, « Journal de Math. pures et appliquées », 1933, (9) XII, p. 173.

2. Sia a un qualunque valore che $f(zz')$ assume in (D_0) . L'equazione $f(zz') = a$ rappresenta in (D_0) un certo numero di pezzi di superficie caratteristiche dotate o no di punti multipli. Descriviamo intorno a ciascuno dei punti di (D_0) nei quali è $f(zz') = a$, un'ipersfera di raggio ε prefissato arbitrariamente piccolo. L'insieme dei punti interni a tutte queste ipersfere può chiamarsi un « intorno di raggio ε delle superficie caratteristiche $f(zz') = a$ » in (D_0) . È chiaro che deve esistere un indice N tale che, per ogni $n > N$, le superficie $f_n(zz') = a$ sono interamente contenute dentro a questo intorno, perchè, nel caso contrario, dovrebbe esistere, fuori del detto intorno, almeno un punto limite, per $n \rightarrow \infty$, di punti (zz') nei quali è $f_n(zz') = a$; e allora, data la tendenza uniforme a limite della successione $\{f_n(zz')\}$, dovrebbe in quel punto limite essere $f(zz') = a$, contro l'ipotesi.

Consideriamo ora un piano caratteristico qualunque π , passante per un punto (z_0, z'_0) qualunque interno a (D_0) , sul quale $f(zz')$ non sia costante. Noi possiamo sempre supporre che tale piano caratteristico sia della forma $z' = \text{cost.}$, perchè a questo caso ci si può sempre ridurre mediante una trasformazione proiettiva sulle variabili z, z' . Assegnato, (sufficientemente ma) arbitrariamente piccolo, un $\varepsilon > 0$, l'indicatrice logaritmica della funzione $f(zz'_0)$ della sola variabile z , estesa alla circonferenza (z_0, ε) (di raggio ε e di centro z_0) e relativa al valore che $f(zz'_0)$ assume nel suo centro, è uguale al più piccolo numero intero k tale che $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0, z'_0) \neq 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(z_0, \varepsilon)} \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(zz'_0)}{f(zz'_0) - f(z_0, z'_0)} dz = k.$$

Ma allora, per ragioni di continuità, l'indicatrice deve conservare il valore k quando si faccia variare di poco il circuito d'integrazione, per es. il suo centro ed il piano su cui esso è descritto. Da ciò si riconosce l'esistenza di un intorno ipersferico Δ di raggio η del punto (z_0, z'_0) , tale che, tracciato un piano qualunque *prossimo* a π ed attraversante il detto intorno ipersferico, e descritto su questo piano un cerchio di raggio ε e con centro in un punto qualunque (zz') appartenente al detto intorno ipersferico, la funzione $f(zz')$ assume sempre lo stesso numero di volte k , entro il detto cerchio, il valore ch'essa assume nel suo centro, ogni punto essendo contato con la sua molteplicità. Ed allora la convergenza uniforme della successione $\{f_n(zz')\}$ assicura dell'esistenza di un indice N tale che, per

ogni $n > N$, è anche

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(z, \varepsilon)} \frac{\frac{\partial f_n}{\partial z}(z\bar{z}')}{f_n(z\bar{z}') - f(\bar{z}\bar{z}')} dz = k,$$

e ciò significa che anche $f_n(z\bar{z}')$ deve assumere lo stesso numero di volte k , sul medesimo piano prossimo a π ed entro la medesima circonferenza di raggio ε , il valore che $f(z\bar{z}')$ assume nel centro.

Da tutto questo si conclude anzitutto che la convergenza delle superficie caratteristiche $f_n(z\bar{z}') = a$ verso le $f(z\bar{z}') = a$, di cui sopra si è parlato, è uniforme.

Precisamente si può dire che, se (z_0, z_0') è un punto non multiplo per la superficie $f(z\bar{z}') = a$ e se π è un piano passante per (z_0, z_0') e non tangente ad essa [risp., tangente ad essa con contatto k -punto], deformando di poco questo piano, tutte le superficie $f_n(z\bar{z}') = a$, per n sufficientemente elevato, tagliano una ed una sola volta [esattamente k volte] quel piano nell'intorno del punto (z_0, z_0') .

Supponiamo ora che $f(z\bar{z}')$ non sia costante sopra nessun piano caratteristico π che penetri nell'interno del dominio (D) . Sopra uno qualunque di questi piani, le $f(z\bar{z}')$, $f_n(z\bar{z}')$ ($n = 1, 2, \dots$) si riducono a funzioni di una sola variabile complessa. Ad esse si potranno quindi applicare i teoremi dimostrati nel mio lavoro citato. Tali teoremi sono:

(§ III, n. 2). Se ε è un numero positivo arbitrariamente piccolo (inferiore alla distanza del contorno di (D) da quello di (D_0)), esiste un intero n' tale che, per ogni $n > n'$, la funzione $f_n(z\bar{z}')$ prende, sul piano π e nell'intorno di raggio ε di ogni punto (z_0, z_0') appartenente a π e al dominio (D_0) , il valore che $f(z\bar{z}')$ prende in (z_0, z_0') , almeno lo stesso numero di volte. In totale (n. 4) $f_n(z\bar{z}')$ prende su π e in (D) , i valori che $f(z\bar{z}')$ prende su π e in (D_0) , almeno lo stesso numero di volte.

(§ III, n. 7). Esiste un n'' tale che, per ogni $n > n''$, la funzione $f_n(z\bar{z}')$ prende su π e in (D_0) , soltanto i valori che $f(z\bar{z}')$ prende su π e in (D) e al più lo stesso numero di volte.

Ragionando per continuità, si vede allora che i valori n' ed n'' possono determinarsi in modo che le proprietà enunciate valgano, tutte le volte che è $n > n'$, o rispettivamente $> n''$, non soltanto sul piano π , ma anche sopra ogni piano che sia sufficientemente prossimo a π (parallelo a π o non).

È dunque possibile determinare un intorno puntuale di π (si chiami I), limitato da piani paralleli a π in modo che sopra ogni piano il quale seghi (D) e (D_0) internamente a detto intorno, val-

gano le proprietà enunciate, tutte le volte che è $n > n'$, oppure $> n''$. Scrivendo l'equazione di π nella forma $\sin \alpha \cdot z + \cos \alpha \cdot z' + \gamma = 0$ (il che è sempre possibile supponendo (D) al finito) si può applicare il lemma di HEINE-BOREL allo spazio a quattro dimensioni avente per coordinate la parte reale e la parte immaginaria di α e di γ per concludere che si può determinare un numero finito di piani analoghi a π i cui intorni I riempiano nel loro insieme tutto l'aggregato dei piani seganti il campo (D) . Ne segue che agli indici n' ed n'' si può attribuire un valore comune per tutti i piani.
