Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Mambriani

Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte. Nota 2ª

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 284–288.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_284_0>

Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte.

Nota 2ª di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *Continuando quanto si espose nella Nota 1ª* (v. questo « Bollettino », vol. XIII (1934), pp. 217-222), *si dànno tre espressioni di un simbolo dell'* AMALDI. *Si giunge così a stabilire, per le derivate di ordine superiore di una funzione composta con quante si vogliono variabili sia intermedie che indipendenti, le espressioni analoghe a quelle date da* R. HOPPE *e da* U. H. MEYER *per le derivate di ordine superiore delle più semplici funzioni composte, cioè delle così dette funzioni di funzione. Si rimanda ad una Nota 3ª il completamento dell'argomento.*

4. La formula (5) della Nota 1ª [1], per la definizione stessa di moltiplicazione binomiale [2], si scrive più estesamente:

$$s_1! \dots s_m!\, H^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{s_1, \dots, s_m} = \tag{7}$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{r_1} (-y_1)^{\alpha_1 - r_1} \dots \sum_{r_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{r_n} (-y_n)^{\alpha_n - r_n} \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_m}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} \left(y_1^{r_1} \dots y_n^{r_n} \right);$$

([1]) V. questo volume del « Bollettino », pp. 217-222. Nella presente Nota si continua la numerazione progressiva degli articoli e delle formule della Nota precedente. Colgo l'occasione per indicare tre « errata » della Nota 1ª:
pag. 219, riga 11 dal basso, in luogo di « forma della » scrivere « della forma »,
» 219, » 4 » » » « Bd. I » » « II Bd., I Teil ».
» 220, » 11 dall'alto, in luogo di

$$\{ (-y_1)^{p_1} \dots (-y_n)^{p_n} \} \quad \text{scrivere} \quad \{ (-y_1)^{\alpha_1} \dots (-y_n)^{\alpha_n} \}.$$

Rimando, poi, ad una Nota 3ª il completamento dell'argomento.

([2]) Nella Nota 1ª le moltiplicazioni binomiali e isobariche sono state indicate con un punto piuttosto grande; non vi è però alcun mutamento nelle definizioni di tali moltiplicazioni: date due successioni m-uple, $[a_{s_1, \dots, s_m}]$, $[b_{s_1, \dots, s_m}]$, dove gli indici $s_1, \dots, s_m$ variano a partire dal valore zero, si chiama loro *prodotto isobarico* la successione di termine generale

$$\sum_{r_1=0}^{s_1} \dots \sum_{r_m=0}^{s_m} a_{s_1 - r_1, \dots, s_m - r_m} b_{r_1, \dots, r_m} = a_{s_1, \dots, s_m} \underset{s_1, \dots, s_m}{\bullet} b_{s_1, \dots, s_m},$$

si chiama loro *prodotto binomiale* la successione di termine generale

$$\sum_{r_1=0}^{s_1} \dots \sum_{r_m=0}^{s_m} \binom{s_1}{r_1} \dots \binom{s_m}{r_m} a_{s_1 - r_1, \dots, s_m - r_m} b_{r_1, \dots, r_m} = a_{s_1, \dots, s_m} \overset{s_1, \dots, s_m}{\bullet} b_{s_1, \dots, s_m}.$$

od anche

$$\frac{s_1!\dots s_m!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}H^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{s_1,\dots,s_m}= \tag{7'}$$

$$=\sum_{r_1=0}^{\alpha_1}\dots\sum_{r_n=0}^{\alpha_n}\frac{(-y_1)^{\alpha_1-r_1}\dots(-y_n)^{\alpha_n-r_n}}{(\alpha_1-r_1)!\dots(\alpha_n-r_n)!}\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\frac{y_1^{r_1}\dots y_n^{r_n}}{r_1!\dots r_n!},$$

la quale non è che la (5′) scritta più estesamente (in base alla definizione di moltiplicazione isobarica).

Sostituendo, nella (3), una di queste espressioni del simbolo $H^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{s_1,\dots,s_m}$ dell'AMALDI, si ottiene, per la derivazione di ordine superiore di una funzione composta generale

$$f(y_1(x_1,\dots,x_m),\dots,y_n(x_1,\dots,x_m)), \tag{2}$$

la formula:

$$\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}f}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}=\sum_\alpha\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}f}{\partial y_1^{\alpha_1}\dots\partial y_n^{\alpha_n}}\sum_{r_1=0}^{\alpha_1}\dots \tag{8}$$

$$\dots\sum_{r_n=0}^{\alpha_n}\frac{(-y_1)^{\alpha_1-r_1}\dots(-y_n)^{\alpha_n-r_n}}{(\alpha_1-r_1)!\dots(\alpha_n-r_n)!}\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\frac{y_1^{r_1}\dots y_n^{r_n}}{r_1!\dots r_n!},$$

dove nel secondo membro la sommatoria relativa ad α va estesa a tutti i possibili sistemi di numeri interi, positivi o nulli, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, tali che sia $\alpha_1+\dots+\alpha_n\leq s_1+\dots+s_m$.

La (8) dà la completa generalizzazione della nota formula per una funzione di funzione:

$$\frac{d^s}{dx^s}f(y(x))=\sum_{\alpha=0}^{s}\frac{1}{\alpha!}\frac{d^\alpha f(y)}{dy^\alpha}\sum_{r=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{r}(-y)^{\alpha-r}\frac{d^s}{dx^s}y^r. \tag{9}$$

Ecco, in ordine di tempo, diversi Autori che si sono occupati di (9) e di sue generalizzazioni:

Nel 1845 R. HOPPE [3] stabilì, e sembra per primo, la formula (9). Nel 1847 U. H. MEYER [4], senza avere a conoscenza il lavoro prece-

[3] R. HOPPE, *Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten*, Leipzig, 1845. Cfr., in particolare, pag. 38, formula (5). Vedasi pure, dello stesso Autore: *Ueber independente Darstellung der höheren Differentialquotienten*, « Math. Annalen », Bd. 4 (1871), pp. 85-87.

[4] U. H. MEYER, *Sur les dérivées d'une fonction de fonction*, « Archiv d. Mathem. und Physik » (Herausgegeben von J. A. Grunert), Theil IX (1847), pp. 96-100. Cfr., in particolare, pag. 98, formula (9).

dente di R. Hoppe, ristabilì la (9) mediante un elegante artificio e l'applicazione della serie di Taylor (il Meyer cita soltanto un lavoro precedente di O. Schlömilch relativo alla derivazione successiva di particolari funzioni di funzione). Nel 1857 O. SCHLÖMILCH (5) indicò una dimostrazione elementare della (9) servendosi, per funzione ausiliaria, della potenza ad esponente intero della $y(x)$. Nel 1864 P. TARDY (6) riprese la formula (9) di Hoppe (« formula molto notevole », come egli dice) e ne diede una generalizzazione alla funzione composta $f(y_1(x), y_2(x))$: tale generalizzazione non coincide, però, col caso particolare che discende dalla nostra formula (8) sopra stabilita; la formula di Tardy è alquanto più complicata e si presterebbe male ad essere ulteriormente generalizzata. Nel 1875 F. MOSSA (7) cercò di dare la generalizzazione delle formule di Hoppe e Tardy al caso della funzione composta $f(y_1(x), \ldots, y_n(x))$, ma il risultato ottenuto non è soddisfacente. Nel 1879 O. SCHLÖMILCH (8) ritornò sulla formula (9), deducendola a mezzo della funzione esponenziale e^y. Nel 1924 F. SBRANA (9) riprese questo ultimo metodo dello Schlömilch, e, senza conoscere quanto già avevano fatto il Tardy e il Mossa, generalizzò la (9) alla $f(y_1(x), y_2(x))$: il risultato dello Sbrana non coincide però con quello del Tardy, esso ci dà invece (salvo insignificanti modifiche) il caso particolare che segue dalla nostra formula (8) quando si ponga $m=1$, $n=2$; lo Sbrana osserva, poi, che lo stesso procedimento si può applicare più in generale alla funzione composta $f(y_1(x), \ldots, y_n(x))$. Nel 1924, pure, I. J. SCHWATT (10) ritrovò ancora, come nuova, la (9) e ne diede diverse dimostrazioni. Nel 1929

(5) O. SCHLÖMILCH, *Zur Theorie der höheren Differentialquotienten*, « Berichte über die Verhandlungen d. k. sächs. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig », Bd. IX (1857), pp. 163-180. Lo stesso lavoro si trova integralmente riportato sotto lo stesso titolo in « Zeitschrift für Mathem. und Physik », Jahrgang III (1858), pp. 65-80.

(6) P. TARDY, *Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. II (1864), pp. 73-77.

(7) F. MOSSA, *Sulla derivazione successiva delle funzioni composte*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. XIII (1875), pp. 175-185. Cfr., in particolare, la pag. 185.

(8) O. SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, Bd. II (1879), II Aufl., pag. 4 e seguenti.

(9) F. SBRANA, *Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte*, « Bollettino Unione Matem. Italiana », vol. III (1924), pp. 65-67.

(10) I. J. SCHWATT, *An introduction to the operations with series*, Philadelphia, 1924. Cfr., in particolare, pag. 12, formula (83), e le pp. 13-17.

O. PERRON [11] diede una dimostrazione di (9) — che attribuisce allo Schwatt — mediante la serie di Taylor, riallacciandosi, senza saperlo, alla dimostrazione di U. H. Meyer del 1847; il Perron, però, completa il caso in cui le funzioni considerate non sono analitiche coll'applicare la formula di Taylor.

5. Si vede facilmente che la (7) si può scrivere in una delle due forme seguenti:

$$(10)\qquad s_1!\dots s_m!\,H^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{s_1,\dots,s_m}=\left[\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\{(y_1-c_1)^{\alpha_1}\dots(y_n-c_n)^{\alpha_n}\}\right]_{\substack{c_1=y_1\\ \dots\dots\\ c_n=y_n}}$$

$$(11)\qquad s_1!\dots s_m!\,H^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{s_1,\dots,s_m}=$$

$$=\left[\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial h_1^{s_1}\dots\partial h_m^{s_m}}\prod_{\nu=1}^{n}\{y_\nu(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m)-y_\nu(x_1,\dots,x_m)\}^{\alpha_\nu}\right]_{\substack{h_1=0\\ \dots\dots\\ h_m=0}},$$

dove in (10) le $c_1,\dots,c_n$ sono costanti (rispetto a $x_1,\dots,x_m$) durante la derivazione e a derivazione eseguita vanno sostituite ordinatamente con $y_1,\dots,y_n$, e in (11) le $h_1,\dots,h_m$ sono variabili durante la derivazione e a derivazione eseguita vanno sostituite tutte con lo zero.

Sostituendo in (3) le espressioni di H date da (10) e da (11) si ottengono, per la derivazione di ordine superiore della funzione composta generale (2), le due formule seguenti:

$$(12)\qquad \frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}f}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}\,\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}f}{\partial y_1^{\alpha_1}\dots\partial y_n^{\alpha_n}}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\{(y_1-c_1)^{\alpha_1}\dots(y_n-c_n)^{\alpha_n}\}\right]_{\substack{c_1=y_1\\ \dots\dots\\ c_n=y_n}},$$

$$(13)\qquad \frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}f}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}\,\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}f}{\partial y_1^{\alpha_1}\dots\partial y_n^{\alpha_n}}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial h_1^{s_1}\dots\partial h_m^{s_m}}\prod_{\nu=1}^{n}\{y_\nu(x_1+h_1,\dots,x_m+h_m)-y_\nu(x_1,\dots,x_m)\}^{\alpha_\nu}\right]_{\substack{h_1=0\\ \dots\dots\\ h_m=0}}.$$

[11] O. PERRON, *Ueber eine Formel des Herrn Schwatt*, « Mathem. Zeitschrift », Bd. 31 (1929), pp. 158-159.

Queste formule sono, rispettivamente, le naturali generalizzazioni delle due seguenti per le funzioni di funzioni:

$$\frac{d^s}{dx^s} f(y(x)) = \sum_{\alpha=0}^{s} \frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha f(y)}{dy^\alpha} \left[\frac{d^s}{dx^s} (y - c)^\alpha \right]_{c=y} \tag{14}$$

(c = costante durante la derivazione),

$$\frac{d^s}{dx^s} f(y(x)) = \sum_{\alpha=0}^{s} \frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha f(y)}{dy^\alpha} \left[\frac{d^s}{dx^s} \{ y(x+h) - y(x) \}^\alpha \right]_{h=0}. \tag{15}$$

La (14), salvo una piccola semplificazione da me apportata, venne pure indicata da R. Hoppe (1845 ([12])); la (15) venne invece stabilita da U. H. Meyer (1847 ([13])) e ripresa poi dallo Schlömilch (1857 ([14])).

([12]) Loc. cit. in ([3]).
([13]) Loc. cit. in ([4]); cfr., in tale lavoro, la pag. 98, formula (7).
([14]) Loc. cit. in ([5]).