Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Beniamino Segre

Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale costante che contengono nell'interno una linea assegnata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 279–283.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_279_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale costante, che contengono nell'interno una linea assegnata.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Una proprietà in grande delle linee chiuse tracciate su di una superficie sferica ed aventi lunghezza non superiore a quella di un circolo massimo. Sua estensione alle altre superficie a curvatura totale costante, ed applicazione alla dimostrazione di un teorema di* FENCHEL *concernente la curvatura integrale di una qualunque linea chiusa dello spazio.*

1. Un bel teorema — dovuto a W. FENCHEL [1] — afferma che *l'integrale* $\oint \varkappa ds$ *della curvatura rispetto all'arco, esteso ad una qualunque linea chiusa dello spazio, è sempre* $\geq 2\pi$; *l'uguaglianza sussistendo solo per le linee piane convesse.*

Ecco in breve come, nel lavoro citato, si giunge a questo risultato. Premessa l'osservazione nota che l'indicatrice sferica delle

[1] Cfr. W. FENCHEL, *Ueber Kruemmung und Windung geschlossener Raumkurven*, « Math. Annalen », t. 101 (1929), p. 238.

tangenti di una qualunque linea chiusa $\mathfrak{L}$ dello spazio, è incontrata da ogni circolo massimo della sfera rappresentativa (di raggio unitario) (1), il FENCHEL ne deduce che — se $\mathfrak{L}$ non è piana — il centro O di questa sfera risulta interno al più piccolo corpo convesso contenente la suddetta indicatrice sferica. Ed allora ne deriva che la lunghezza di quest'ultima è $> 2\pi$, e quindi pure il teorema enunciato in principio, poggiando su tre lemmi preliminari concernenti i corpi convessi; lemmi che, pur essendo di per sè interessanti, vengono ad appesantire alquanto la trattazione (2).

In questa breve Nota io giungo — con mezzi del tutto elementari — ad un risultato assai più espressivo, che può venir così enunciato:

TEOR. I. — *Su di una superficie sferica* S, *una qualunque linea chiusa di* JORDAN, *rettificabile, di lunghezza* a *non superiore a quella di un circolo massimo, e che non consti di due archi (distinti o sovrapposti) di circolo massimo cogli estremi in comune, risulta sempre completamente interna ad una calotta di* S — *facilmente costruibile — avente raggio sferico* $\frac{1}{4}$ a.

Poichè in nessun caso questo raggio supera la quarta parte di un circolo massimo, così « a fortiori » la linea suddetta risulta tutta interna ad una mezza sfera; esiste cioè sempre qualche circolo massimo che non la incontra, e si ricade nel teorema di FENCHEL.

La dimostrazione del teor. I (che daremo al n. 3), ha poi netto carattere costruttivo; da essa risulta ad es. che *basta che una linea chiusa tracciata su di una sfera venga incontrata da un solo circolo massimo — opportunamente definito — perchè si possa asserire che la lunghezza della prima non è superata da quella del secondo.*

Notiamo inoltre che il teor. I non può venir ulteriormente affinato; ciò discende subito — per ragioni di continuità — dal fatto ovvio che, quando una linea chiusa di lunghezza a, tracciata su S, si riduce a due archi di circolo massimo (di lun-

(1) Ved. G. PÓLYA - G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze*, t. II (Berlin, Springer, 1925), pp. 165 e 391, probl. 13; la dimostrazione di tale fatto — dovuta a K. LÖWNER e riportata dal FENCHEL — si fonda sulla considerazione di un certo integrale esteso alla $\mathfrak{L}$. Se ne può però assai più semplicemente dare una prova, notando che, fissato comunque nello spazio un piano orientato α, vi è sempre su $\mathfrak{L}$ almeno un punto avente da α distanza massima ed almeno un punto avente da α distanza minima, e che in ciascuno di tali punti la tangente alla $\mathfrak{L}$ risulta parallela al piano α.

(2) E neppure arreca semplificazioni sostanziali un procedimento, poco dissimile, proposto da E. SCHMIDT [ved. W. FENCHEL, Mem. cit., nota 12)].

ghezza $\frac{1}{2}a$ non superiore a quella di mezzo circolo massimo) cogli estremi in comune, ogni calotta che l'abbia completamente nell'interno ha raggio sferico $> \frac{1}{4}a$.

Il teor. I può oltracciò venir esteso nel modo seguente:

TEOR. II. — *Su di una qualunque superficie a curvatura totale costante, una linea chiusa di* JORDAN, *rettificabile, di lunghezza* a *convenientemente limitata, e che non si riduca a due archi sovrapposti di geodetica, è sempre completamente* interna *a qualche circolo geodetico (a centro) di raggio* $\frac{1}{4}$a. *Quando si tratti del piano euclideo o del piano non euclideo iperbolico, la lunghezza* a *non deve soddisfare ad alcuna limitazione.*

Un risultato analogo sussiste naturalmente per una qualunque linea aperta, $\mathfrak{A}$, di lunghezza $\frac{1}{2}a$, come subito si vede applicando il teor. II alla linea chiusa di lunghezza a, che si ottiene percorrendo due volte l'arco $\mathfrak{A}$.

2. Sia K una calotta sferica, non maggiore di mezza superficie sferica, e denotiamo con C il suo centro e con $\mathfrak{C}$ il suo contorno. Consideriamo su K due qualunque punti A, B « simmetrici » rispetto a C, ossia tali che siano congiunti da un arco di circolo massimo dimezzato da questo punto; vogliamo intanto mostrare che, *comunque si scelga un punto* P *su* $\mathfrak{C}$, *sempre risulta:*

$$AP + BP \geq \textit{diametro di } K, \tag{1}$$

ove p. es. AP denota la distanza geodetica dei punti A, P, ossia la lunghezza dell'arco di circolo massimo $\widehat{AP}$ (giacente su K).

Si ha invero che la « simmetria » rispetto a C (trasformante in sè K), muta l'arco $\widehat{BP}$ nell'arco $\widehat{AP'}$, indicando con P' il punto di $\mathfrak{C}$ diametralmente opposto a P. Tenuto anche conto della proprietà estremale dei circoli massimi, si ha pertanto:

$$AP + BP = AP + AP' \geq PP',$$

ossia effettivamente sussiste la (1). Si vede anzi, di più, che nella (1) vale il segno di uguaglianza se e solo se i punti P, A, P' stanno su di un arco di circolo massimo: ciò accade in corrispondenza ad una posizione arbitraria di P su $\mathfrak{C}$, se A, B coincidono con C, oppure se K è una mezza superficie sferica; in ogni altro caso il fatto suddetto si verifica solo se P coincide con l'uno o con l'altro dei due punti secondo cui il piano ABC incontra la circonferenza $\mathfrak{C}$.

3. Su di una superficie sferica S consideriamo una qualunque linea $\mathfrak{L}$, soddisfacente alle ipotesi del teor. I, e fissiamo ad arbitrio su essa due punti A, B che la dividano in due archi $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ aventi lunghezze uguali.

A e B non posson esser diametralmente opposti sulla sfera. perchè in caso contrario $\mathfrak{L}'$ ed $\mathfrak{L}''$ dovrebbero ridursi a due semicircoli massimi (contro le ipotesi fatte), dato che la lunghezza $\frac{1}{2}a$ di ciascuno di tali archi non supera quella di un semicircolo massimo. È dunque in ogni caso individuato l'arco $\widehat{AB}$ di circolo massimo, che costituisce su S il cammino di minima lunghezza fra A e B (arco che si riduce ad un punto quando A e B coincidono); e ne sia C il punto di mezzo.

Essendo per ipotesi escluso che $\mathfrak{L}'$ ed $\mathfrak{L}''$ coincidano coll'arco $\widehat{AB}$, la lunghezza AB di quest'ultimo sarà minore della lunghezza $\frac{1}{2}a$ dei primi due, onde risulta:

$$CA = CB < \frac{1}{4}a.$$

Dunque, se consideriamo su S la calotta K (non superiore a mezza superficie sferica) avente centro C e raggio sferico $\frac{1}{4}a$, si ha intanto che i punti A e B sono interni ad essa e « simmetrici » rispetto al suo centro.

In base al n. 2 ed alla proprietà estremale dei circoli massimi, consegue che — se $\mathfrak{L}'$ contiene un punto P del contorno $\mathfrak{C}$ di K — risulta:

$$\frac{1}{2}a = \textit{lunghezza di } \mathfrak{L}' \geq AP + BP \geq \textit{diametro di } K = \frac{1}{2}a\,;$$

deve perciò in tal caso esser

$$\textit{lunghezza di } \mathfrak{L}' = AP + BP,$$

per il che occorre che $\mathfrak{L}'$ si riduca all'insieme dei due archi $\widehat{AP}$ e $\widehat{BP}$, ed inoltre deve nella (1) valere il segno di uguaglianza. Lo stesso può dirsi naturalmente per $\mathfrak{L}''$. Ne segue che *la linea* $\mathfrak{L}$ *è sempre tutta interna alla calotta* K *dianzi costruita, tranne uno od al più due dei suoi punti che posson stare sul contorno* $\mathfrak{C}$ *di* K; in un punto P siffatto la $\mathfrak{L}$ ammette necessariamente un punto angoloso, con tangenti distinte dalla tangente in P a $\mathfrak{C}$.

Rileviamo che, in virtù del n. 2 e dell'ipotesi che $\mathfrak{L}$ non consti di due archi di circolo massimo cogli estremi in comune, quando $\mathfrak{L}$ si appoggia a $\mathfrak{C}$ in due punti, questi non posson essere fra loro diametralmente opposti su $\mathfrak{C}$. Se dunque $\mathfrak{L}$ ha in comune uno o due punti con $\mathfrak{C}$, si può sempre far ruotare di poco il piano di $\mathfrak{C}$, in modo ch'esso — pur continuando avere con $\mathfrak{L}$ quel punto o quei punti d'appoggio — determini su S una calotta, contenente $\mathfrak{L}$, di raggio sferico minore di $\frac{1}{4}a$. La calotta concentrica a quest'ultima ed avente raggio sferico $\frac{1}{4}a$, contiene allora ovviamente la linea $\mathfrak{L}$ completamente nel suo interno.

Il teor. I è così dimostrato in tutti i casi. Si potrebbe vedere che, quando si scelgano opportunamente sulla linea $\mathfrak{L}$ i punti A, B (i quali sono unicamente vincolati dalla condizione di dividerla in due archi aventi lunghezze uguali!), la calotta K determinata in principio gode già della proprietà di contenere tutta la $\mathfrak{L}$ nel suo interno.

4. Le considerazioni del n. 3, lievemente modificate, valgono pure a stabilire il teor. II; basta all'uopo poggiare, anzichè sui risultati del n. 2, sulla loro seguente ovvia generalizzazione.

Su di una qualunque superficie a curvatura totale costante, si consideri la porzione K delimitata da un circolo geodetico $\mathfrak{C}$, di centro C e raggio r così piccolo, che il cammino di minima lunghezza congiungente due qualunque punti di K sia unico e tutto interno a K (salvo gli estremi che stessero su $\mathfrak{C}$). Presi arbitrariamente due punti distinti A, B interni a K e « simmetrici » rispetto a C (ossia congiunti da un arco di geodetica dimezzato da questo punto), *la somma delle distanze geodetiche dei punti fissi* A *e* B *da un punto* P *mobile su* $\mathfrak{C}$, *ammette come minimo* 2r; *il minimo essendo solo raggiunto in corrispondenza ai due punti comuni a* $\mathfrak{C}$ *ed alla geodetica passante per i punti* A, B, C.

Si noti che l'eventuale limitazione a cui può dover sottostare il raggio r, e conseguentemente pure quella di cui è fatto cenno nell'enunciato del teor. II (relativa alla lunghezza a), dipendon — oltrechè dalla curvatura (costante) della superficie che si considera — dalle proprietà topologiche di quest'ultima.

Osservazione. — I teoremi I e II si estendono immediatamente al caso di una curva che rispettivamente appartenga ad un'ipersuperficie sferica o ad una qualunque varietà a curvatura costante; ne consegue la validità del teorema di Fenchel (di cui al n. 1), per tutte le curve chiuse degli iperspazi. Vale la pena di rilevare che *un teorema analogo a quest'ultimo non sussiste per le superficie*: è infatti notorio che l'integrale $\iint \varkappa d\sigma$ della curvatura totale rispetto all'area, esteso ad una superficie chiusa orientabile appartenente ad uno spazio avente un qualunque numero di dimensioni, è sempre uguale a $4\pi(1-p)$, ove p denota il genere della superficie.