Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Beniamino Segre

Intorno alle ovali inscritte in un poligono regolare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 275–279.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_275_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Intorno alle ovali inscritte in un poligono regolare.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna),

Sunto. - In questa Nota vien stabilito che: *Ad ogni ovale di lunghezza* h *si può sempre circoscrivere (almeno) un* q u a d r a t o, *il cui lato ha lunghezza interna all'intervallo* $\frac{1}{4}h \mid\!\!-\!\!\mid \frac{1}{2\sqrt{2}}h$. Più in generale risulta che: *Se un'ovale è inscritta in un* n*-gono regolare, il rapporto fra la sua lunghezza ed il perimetro dell'*n*-gono circoscritto, è un numero interno all'intervallo* $\cos\frac{\pi}{n} \mid\!\!-\!\!\mid 1$; *e questo intervallo è il* m i n i m o *per cui sempre valga tale proprietà.*

1. Un'o v a l e sarà per noi il *contorno di una qualunque superficie piana convessa,* nell'ipotesi che risulti *privo di punti angolosi.* Inoltre la distanza fra due tangenti parallele di un'ovale, si dirà brevemente la l a r g h e z z a dell'ovale nella direzione comune a quelle tangenti.

Data un'ovale, $\mathcal{C}$, per ogni direzione θ del suo piano consideriamo la differenza, $f(\theta)$, fra la larghezza di $\mathcal{C}$ nella direzione θ e la larghezza di $\mathcal{C}$ nella direzione perpendicolare a θ. La funzione $f(\theta)$ risulta c o n t i n u a, ed assume manifestamente valori o p p o s t i in corrispondenza a due qualunque direzioni perpendicolari fra loro: essa dunque necessariamente si a n n u l l a in corrispondenza ad almeno una coppia di direzioni ortogonali.

È chiaro d'altronde che due tangenti parallele di $\mathcal{C}$ — per la direzione θ delle quali $f(\theta)$ si annulli — insieme alle due tangenti di $\mathcal{C}$ a quelle perpendicolari, determinano un *quadrato circoscritto all'ovale.*

2. Rileviamo incidentalmente che, se un'ovale $\mathcal{C}$ possiede curvatura variabile da punto a punto con continuità, e se $\mathcal{C}$ ammette un n–gono regolare circoscritto, si può asserire — a norma di una proposizione generale che verrà stabilita altrove — che esistono su $\mathcal{C}$ (almeno) n punti distinti in cui il raggio di curvatura è uguale al raggio del cerchio inscritto nell'n–gono suddetto: tali punti, inoltre, risultano separati da (almeno) n vertici dell'ovale (punti cioè in cui la curvatura di $\mathcal{C}$ ha un estremo).

Dal n. 1 segue così, fra l'altro, una nuova dimostrazione del celebre teorema secondo cui *il minimo numero dei vertici di un'ovale è uguale a 4* (¹).

3. Senza dover fare alcuna ipotesi concernente la curvatura di un'ovale, si può sempre definire la lunghezza di quest'ultima, come elemento separatore delle classi contigue formate dai perimetri dei poligoni convessi inscritti e circoscritti all'ovale. La lunghezza di un'ovale inscritta in un poligono convesso è dunque sempre compresa fra il perimetro di questo, ed il perimetro del poligono convesso avente per vertici i punti di contatto dell'ovale coi lati del primo poligono (nel caso che uno di tali lati abbia un segmento in comune coll'ovale, come relativo punto di contatto può venir assunto un qualunque punto di detto segmento).

Tenendo conto di ciò e del n. 1, è assai facile stabilire tutti i fatti enunciati nel Sunto, poggiando sul seguente teorema di geometria elementare, che verrà dimostrato al n. 5:

I perimetri degli n*–goni (convessi od intrecciati) inscritti in un dato* n*–gono regolare, ammettono in ogni caso un minimo, raggiunto in corrispondenza all'* n*–gono regolare avente per vertici i punti medi dei lati del poligono assegnato. Se* n *è dispari, ogni altro* n*–gono inscritto nel dato poligono, ha perimetro maggiore di quello del suddetto* n*–gono regolare inscritto; per contro, quando* n

(¹) Per la bibliografia — assai ampia — concernente questo teorema, ved. T. Bonnesen-W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper,* « Ergebnisse der Math. », t. III, 1 (Berlin, Springer, 1934), p. 145. Un'altra semplicissima dimostrazione di detto teorema, trovasi fra l'altro in B. Segre, *Il teorema sul minimo numero dei vertici di un'ovale, ed alcune sue estensioni,* « Atti R. Accad. delle Scienze di Torino », t. 70 (1934-35).

è pari, vi sono infiniti n*–goni inscritti di perimetro minimo, caratterizzati dalla proprietà che ogni loro lato si appoggia a due lati consecutivi del dato* n*–gono, determinando con questi un triangolo isoscele.*

4. Esponiamo dapprima una dimostrazione del teorema dianzi enunciato, valida solo per $n = 4$, avente però il vantaggio di applicarsi ad un qualsiasi rettangolo. A tal uopo osserviamo intanto che:

L'ipotenusa di un triangolo rettangolo, è sempre maggiore od uguale alla somma delle proiezioni dei due cateti su di una qualunque retta del suo piano; l'uguaglianza sussiste se e solo se tale retta è parallela all'ipotenusa del triangolo rettangolo, oppure alla mediana di questo relativa all'ipotenusa (1).

Dato invero un triangolo AMN rettangolo in A, consideriamo una retta r arbitraria del suo piano, e le proiezioni ortogonali A', M', N' dei punti A, M, N su di essa. Se M' od N' coincidono con A', il fatto asserito è ovvio; supposto pertanto che M' ed N' siano distinti da A', non si hanno che da esaminare due casi, secondochè M', N' stanno da bande opposte o dalla medesima banda di A'. Nel primo caso, il segmento $M'N'$ risulta precisamente uguale alla somma delle proiezioni su r dei cateti AM ed AN; d'altronde esso è non maggiore dell'ipotenusa MN (di cui è la proiezione ortogonale su r), l'uguaglianza fra tali segmenti equivalendo al fatto ch'essi siano fra loro paralleli. Se invece M' ed N' sono dalla stessa banda di A', per concludere nel modo voluto basta considerare il triangolo simmetrico di AMN rispetto alla retta AM, ed applicare a tale triangolo ed alla retta r il risultato testè acquisito.

Ciò premesso, consideriamo un qualunque quadrilatero (convesso od intrecciato), che sia inscritto in un dato rettangolo $ABCD$. Delle due diagonali AC, BD del rettangolo, almeno una — sia p. es. la BD — non incontra due (opportuni) lati opposti del quadrilatero inscritto; questo avrà dunque due vertici consecutivi uno su AB ed uno su AD, gli altri due (pure consecutivi fra loro) essendo uno su CB ed uno su CD: siano, a prescinder dall'ordine, M ed N i primi due vertici del quadrilatero, P e Q gli ultimi due, ed i quattro vertici si succedano nell'ordine $MNPQ$. È chiaro che le proiezioni ortogonali di questi quattro punti sulla retta AC, diciamole rispettivamente M', N', P', Q', cadono tutte nell'interno del segmento AC.

(1) Qui e nel seguito intendiamo che i segmenti siano considerati in senso elementare, e cioè *non affetti da segno*.

Applicando ai triangoli rettangoli AMN, CPQ ed alla retta AC l'osservazione premessa, si ottengono le limitazioni:

$$(1) \qquad MN \geq AM' + AN', \quad PQ \geq CP' + CQ',$$

nelle quali i segni di uguaglianza sussistono se e solo se MN, PQ risultano paralleli alla retta BD. Si ha inoltre:

$$(2) \qquad NP \geq N'P', \quad MQ \geq M'Q',$$

in quanto i segmenti che compaione a secondo membro delle (2) non sono altro che le proiezioni ortogonali su AC dei segmenti che ivi figurano a primo membro; e nelle (2) occorre prendere i segni di uguaglianza, quando e solo quando NP, MQ risultano paralleli alla retta AC.

Sommando a membro a membro le (1), (2), si deduce che è sempre:

$$\textit{perim. di } MNPQ \geq 2AC.$$

Nell'ultima relazione vale il segno di uguaglianza nel caso, e nel caso soltanto, che ciò contemporaneamente accada per le (1), (2): il che, per quanto sopra, equivale a supporre che i lati del quadrilatero $MNPQ$ siano paralleli alle diagonali del rettangolo $ABCD$. Resta così provato che:

Il perimetro di un qualunque quadrilatero (semplice od intrecciato) inscritto in un dato rettangolo, è maggiore od uguale al doppio della diagonale di quest'ultimo; l'uguaglianza è raggiunta dagli infiniti parallelogrammi inscritti le cui mediane coincidono (in posizione) colle diagonali del rettangolo, e solo da questi.

5. Per stabilire il teorema del n. 3 in tutta la sua generalità, ci varremo ora di argomentazioni non meno semplici di quelle svolte al n. 4, relativamente al caso di $n = 4$. Osserviamo anzitutto che:

Presi comunque tre punti, uno su ciascuno dei lati di un triangolo isoscele, la somma dei segmenti che congiungono il punto scelto sulla base cogli altri due punti, risulta sempre maggiore od uguale all'altezza del triangolo relativa ad uno dei due lati uguali. Fra dette grandezze sussiste l'uguaglianza nel caso, e nel caso soltanto, che i due segmenti considerati siano rispettivamente perpendicolari ai lati uguali del triangolo isoscele a cui essi terminano [1].

[1] Ciò si deduce senz'altro dal fatto ovvio che *è costante la somma delle distanze di un punto mobile sulla base di un triangolo isoscele, dagli altri due lati.*

Dato un n-gono regolare, $\mathcal{S}$, si divida la sua superficie in n triangoli isosceli uguali, mediante i segmenti congiungenti i vertici col centro di $\mathcal{S}$; se a è la misura del lato di $\mathcal{S}$, l'altezza di uno di questi triangoli, relativa ad uno dei suoi due lati uguali, vale:

$$a \cos \frac{\pi}{n}.$$

Il contorno $\mathcal{Q}$ di un qualunque n-gono inscritto in $\mathcal{S}$, penetra nell'interno di ciascuno di detti triangoli; e precisamente, entro ad uno qualunque di questi triangoli, vi sono (almeno) i due segmenti ch'esso intercetta sui due lati consecutivi di $\mathcal{Q}$, uscenti dal vertice di $\mathcal{Q}$ che appartiene alla base del triangolo considerato. Per ciò che precede, si ha in ogni caso:

$$\textit{perim. di } \mathcal{Q} \geq n\, a \cos \frac{\pi}{n} = \textit{perim. di } \mathcal{S} \times \cos \frac{\pi}{n};$$

e l'uguaglianza fra queste espressioni sussiste nel caso e nel caso soltanto che ogni lato di $\mathcal{Q}$ si appoggi a due lati consecutivi di $\mathcal{S}$, determinando con questi un triangolo isoscele.

Si conclude pertanto col teorema del n. 3, da cui segue subito — nel modo accennato — la proposizione del Sunto.

(1) Cfr. W. Fenchel, *Ueber Kruemmung und Windung geschlossener Raumkurven*, « Math. Annalen », t. 101 (1929), p. 238.