Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Lampariello

Sulla determinazione di soluzioni particolari dei sistemi-differenziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 272–275.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_272_0>

Sulla determinazione di soluzioni particolari dei sistemi differenziali.

Nota di G. LAMPARIELLO (a Roma).

Sunto. - *Si trasporta ai sistemi differenziali di* PFAFF *un teorema di* LEVI-CIVITA *che permette di conseguire soluzioni particolari o varietà invarianti di un sistema differenziale ordinario.*

Sia dato un sistema differenziale ordinario nello spazio delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

essendo le X funzioni delle x che non si annullano simultaneamente in uno stesso punto.

Levi-Civita ha dimostrato che, se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

è un *integrale* del sistema, le equazioni

$$(\sigma) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definiscono una *soluzione* o una *varietà invariante* del sistema, nel senso che, a partire da un generico punto di σ, lo spostamento eseguito secondo le equazioni differenziali è *tangente* a σ.

Questo bel teorema comporta notevoli applicazioni alla meccanica analitica ed aveva già, sotto forma diversa ma sostanzialmente equivalente, condotto fin dal 1901 alla scoperta di una particolare classe di soluzioni dei sistemi di equazioni canoniche, dette poi *stazionarie secondo Levi-Civita.*

Vogliamo qui mostrare che la proprietà espressa dal teorema di Levi-Civita vale per qualunque sistema di Pfaff

$$(S) \qquad \sum_{1}^{n}{}_k\, a_{ik}\, dx_k = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

che ammetta una combinazione integrabile $df = 0$.

È ben noto che il problema della integrazione di un sistema di Pfaff che ammetta qualche soluzione si riconduce all'integrazione di un sistema differenziale ordinario, quindi la proprietà che si vuole trasportare appare implicitamente accertata dallo stesso teorema di Levi-Civita; tuttavia, non sembra inopportuno darne una dimostrazione diretta con i minimi mezzi.

Supponiamo dunque che il sistema S consti di m equazioni indipendenti nei differenziali dx. Risolviamo S rispetto ai differenziali di m variabili x che denotiamo con $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ed indichiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_r$ le $r = n - m$ variabili rimanenti, talchè S assumerà la forma

$$(1) \qquad du_i = \sum_{1}^{r}{}_k\, X_{ik}\, dx_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dove le X_{ik} sono mr funzioni delle n variabili x, u.

Per ipotesi, l'equazione

$$f(x \mid u) = c$$

è soddisfatta per un opportuno valore della costante c da ogni soluzione di (1)

$$u_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il differenziale di f, tenendo conto delle (1), è

$$df = \sum_1^r {}_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^m {}_i X_{ik} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) dx_k .$$

Dovendo essere $df = 0$ in conseguenza della (1), si trae per f il sistema di relazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^m {}_i X_{ik} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{2}$$

le quali, come si può facilmente dimostrare debbono essere soddisfatte identicamente negli argomenti x, u.

Ciò posto, deriviamo rispetto ad x_i le (2). Si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_i X_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_1^m {}_i \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0.$$

Queste relazioni sulla varietà σ definita dalle equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad && (i = 1, 2, \ldots, r) \\ &\frac{\partial f}{\partial u_j} = 0 \qquad && (j = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned} \right. \tag{*}$$

si riducono a

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_i X_{ik} \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Moltiplicando per dx_k e sommando rispetto all'indice k, si ha

$$\sum_1^r {}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_k + \sum_1^m {}_i \left(\sum_1^r {}_k X_{ik} \, dx_k \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

cioè, per le (1)

$$d \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3}$$

Analogamente, il risultato della derivazione delle (2) rispetto ad u_j sulla varietà σ è l'insieme delle relazioni

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_j} + \sum_1^m {}_i X_{ik} \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial u_j} = 0,$$

da cui, moltiplicando per dx_k e sommando rispetto all'indice k, si ha

$$d \frac{\partial f}{\partial u_j} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

Le (3), (4) mostrano appunto che uno spostamento dx, du eseguito secondo le (1) a partire da un punto della varietà σ è *tangente* a σ.

Circa le dimensioni della varietà σ, si osserverà che essa è definita dalle equazioni (*), i cui primi membri sono legati dalle (2), in numero di r.

Dunque, il numero delle equazioni indipendenti atte a definire σ è al massimo $n - r = m$.

Perciò nel caso generale, cioè salvo incompatibilità o speciali relazioni derivanti dalla particolare natura della funzione f, si hanno m equazioni indipendenti involgenti n incognite, le quali perciò definiscono una o più varietà ad $n - m = r$ dimensioni.

Il numero minimo di dimensioni è pertanto il numero delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Per i sistemi differenziali ordinari la varietà minima ottenuta col procedimento di LEVI-CIVITA è una *curva integrale* o *traiettoria* del sistema.