Francesco Sbrana

Un'osservazione sul moto di un solido pesante attorno ad un punto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 269–271.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_269_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Un'osservazione sul moto di un solido pesante attorno ad un punto.

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

Sunto. - *Si stabiliscono tre equazioni simultanee per il moto di un solido pesante sospeso per un punto, nelle quali figurano come incognite le sole componenti della velocità angolare secondo gli assi principali d'inerzia corrispondenti al punto di sospensione.*

1. La lettura di due interessanti Note della sig.na M. R. FABBRI su un particolare movimento di un solido pesante sospeso per un punto O, nelle quali si considerano certi legami tra le componenti p, q, r secondo gli assi principali d'inerzia x, y, z corrispondenti al punto O, della velocità angolare del solido, nell'ipotesi che il baricentro si trovi su uno dei detti assi [1], mi ha indotto a riprendere un'osservazione da me fatta tempo addietro (ma finora non pubblicata), valida per qualunque solido pesante sospeso per un punto, che mi sembra possa giovare in ricerche di questo genere.

Nelle equazioni di EULERO-POISSON (sempre nel caso del solido pesante) figurano notoriamente sei incognite, le p, q, r, ed i coseni direttori γ_1, γ_2, γ_3 della verticale (che supporremo orientata

[1] Cfr. M. R. FABBRI, *Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XIX, serie 6ª, 1° sem., pp. 407-415; *Sopra un particolare movimento di un solido pesante intorno a un punto fisso*, ibidem, pp. 495-502.

verso il basso), rispetto agli assi x, y, z. Ora è possibile eliminare γ_1, γ_2, γ_3, ottenendo così tre equazioni simultanee nelle p, q, r. Poichè, per quanto mi risulta, queste equazioni non sono state sinora stabilite, mi permetto di pervenire ad esse in ciò che segue.

2. Per poter raggiungere lo scopo prefissoci riprendiamo naturalmente le equazioni di EULERO

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}+(C-B)qr=P(\gamma_2 z_0-\gamma_3 z_0), \\ B\dfrac{dq}{dt}+(A-C)rp=P(\gamma_3 x_0-\gamma_1 z_0), \\ C\dfrac{dr}{dt}+(B-A)pq=P(\gamma_1 y_0-\gamma_2 x_0), \end{cases}$$

in cui A, B, C sono notoriamente i momenti d'inerzia del solido rispetto agli assi x, y, z; x_0, y_0, z_0 le coordinate del baricentro G rispetto agli stessi assi, P il peso del solido; ci varremo inoltre dell'equazione dell'energia

$$(2)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^3=h+2P(\gamma_1 x_0+\gamma_2 y_0+\gamma_3 z_0),$$

e dell'integrale delle aree

$$(3)\qquad Ap\gamma_1+Bq\gamma_2+Cr\gamma_3=H,$$

con h ed H costanti.

Rappresentando per brevità con L, M, N i primi membri delle (1), si ha subito da queste

$$(\mathrm{I})\qquad Lx_0+My_0+Nz_0=0,$$

e cioè la prima delle equazioni che vogliamo stabilire.

Ancora dalle (1) discende

$$L^2+M^2+N^2=P^2\begin{Vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x_0 & y_0 & z_0\end{Vmatrix}^2=P^2(\rho^2-S^2),$$

dove $\rho^2=x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2$, ed inoltre, in base alla (2),

$$(4)\qquad S=\gamma_1 x_0+\gamma_2 y_0+\gamma_3 z_0=\frac{1}{2P}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-h).$$

Per conseguenza otteniamo la nostra seconda equazione

$$(\mathrm{II})\qquad L^2+M^2+N^2=P^2\rho^2-\frac{1}{4}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-h)^2.$$

Moltiplichiamo ora le (1) ordinatamente per Ap, Bq, Cr, sommiamo, e successivamente quadriamo. Si trova, valendosi della (3),

$$(ApL+BqM+CrN)^2=P^2\begin{vmatrix} Ap & Bq & Cr \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2=$$

$$=P^2\begin{vmatrix} A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2 & H & Apx_0+Bqy_0+Crz_0 \\ H & 1 & S \\ Apx_0+Bqy_0+Crz_0 & S & \rho^2 \end{vmatrix},$$

e quindi l'ultima delle equazioni preannunziate:

$$\text{(III)}\quad (ApL+BqM+CrN)^2=P^2\{(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)(\rho^2-S^2)+$$
$$+2HS(Apx_0+Bqy_0+Crz_0)-(Apx_0+Bqy_0+Crz_0)-H^2\rho^2\},$$

in cui S è data dalla (4).

È da notarsi che si ha

$$ApL+BqM+CrN=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}K^2,$$

dove K indica il momento cinetico del solido rispetto al punto di sospensione.

Naturalmente le equazioni (I), (II), (III) risultano notevolmente semplificate nel caso (considerato dalla sig.na FABBRI) in cui G si trovi su uno degli assi d'inerzia.