Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Antonio Signorini

Sul prodotto vettore

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 267–269.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Sul prodotto vettore (¹).

Nota di A. SIGNORINI (a Napoli).

Sunto. - *Vien messo in evidenza che in ogni metrica riemanniana ad* n ≥ 3 *dimensioni il prodotto vettoriale di* n — 1 *vettori sempre si conserva nel trasporto per parallelismo di* LEVI-CIVITA.

. . . . . Può forse riuscire utile l'esplicito rilievo che in ogni metrica riemanniana V_n a tre o più dimensioni il prodotto vettoriale di $n-1$ vettori sempre si conserva nel trasporto per parallelismo. Per convincersene, non occorre neppure richiamare la forma precisa delle equazioni del parallelismo: basta fare appello alla conseguente conservazione degli angoli e delle lunghezze, associandole una delle espressioni appresso indicate per la grandezza del prodotto vettoriale (e la necessaria ortogonalità del prodotto stesso a ciascuno dei suoi fattori).

Siano

$$\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_1, \ldots \quad \mathbf{v}_{n-1}$$

n qualsiasi vettori applicati al punto generico P di V_n e $\mathbf{p}$ il prodotto vettoriale (²) di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{n-1}$ (nell'ordine scritto). Colle notazioni ormai classiche pel prodotto scalare, per la forma differenziale fondamentale di V_n, per le componenti covarianti degli n vettori in esame e per le omologhe componenti contravarianti, accanto a

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} v_{0|1} & v_{0|2} & \ldots & v_{0|n} \\ v_{1|1} & v_{1|2} & \ldots & v_{1|n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1|1} & v_{n-1|2} & \ldots & v_{n-1|n} \end{vmatrix}$$

e

$$v_{r|s} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\, v_r^{\,k} \qquad (r, s = 0, 1, \ldots n-1),$$

(¹) Estratto da una lettera al prof. T. LEVI-CIVITA.

(²) Ved. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* (Roma, 1925; rilevate dalla Casa Editrice Zanichelli), Cap. VI, p. 182; oppure la traduzione inglese (Glasgow, Blackie, 1927) o la tedesca (Berlin, Springer, 1928).

si ha

$$(2) \qquad \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} = \sqrt{a} \begin{vmatrix} v_0^{\ 1} & v_0^{\ 2} & \dots & v_0^{\ n} \\ v_1^{\ 1} & v_1^{\ 2} & \dots & v_1^{\ n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v^1_{\ n-1} & v^2_{\ n-1} & \dots & v^n_{\ n-1} \end{vmatrix}.$$

Poniamo $\theta_{rs} = \widehat{\mathbf{v}_r \mathbf{v}_s}$ $(r,\ s = 0,\ 1, \dots\ n-1)$ e

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_{m,\,m+1} & \dots & \cos\theta_{m,\,n-1} \\ \cos\theta_{m+1,\,m} & 1 & \dots & \cos\theta_{m+1,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\theta_{n-1,\,m} & \cos\theta_{n-1,\,m+1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \qquad (m=0,\ 1, \dots\ n-2).$$

Per effetto dell'identità

$$\sum_{1}^{n}{}_k\, v_{r|k}\, v_s^{\ k} = v_r v_s \cos\theta_{rs} \qquad (r,\ s = 0,\ 1, \dots\ n-1).$$

moltiplicando membro a membro (1) e (2) si ottiene

$$(3) \qquad (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{p})^2 = v_0^{\ 2} v_1^{\ 2} \dots v^2_{\ n-1} D_0.$$

Se

$$\cos\theta_{0,\,1} = \cos\theta_{0,\,2} = \dots = \cos\theta_{0,\,n-1} = 0$$

D_0 non differisce da D_1: basta quindi specializzare $\mathbf{v}_0$ in $\mathbf{p}$, perchè la (3) porti in ogni caso a concludere

$$(4) \qquad p = v_1 v_2 \dots v_{n-1} \sqrt{D_1}.$$

Facendo intervenire una qualunque, V_{n-1}, delle ipersuperficie della nostra V_n tangenti in P a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots\ \mathbf{v}_{n-1}$, subito si riconosce che (in completo accordo con quanto è ben noto nel caso particolare delle V_3 euclidee) il secondo membro della (4) dà pure l'estensione dell'elemento di V_{n-1} individuato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots\ \mathbf{v}_{n-1}$ (pensati come infinitesimi).

Supponendo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots\ \mathbf{v}_{n-1}$ linearmente indipendenti ed $n \geq 4$, accenniamo con $\mathbf{p}_1$ il prodotto vettoriale in V_{n-1} di $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3, \dots\ \mathbf{v}_{n-1}$ (nell'ordine scritto) e con α_1 l'angolo $\widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{v}_1}$. Dato che la (3) vale per ogni $n \geq 3$, necessariamente sarà

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{p}_1)^2 = v_1^{\ 2} v_2^{\ 2} \dots v^2_{\ n-1} D_1,$$

cioè

$$p_1 \,|\cos\alpha_1| = v_2 v_3 \dots v_{n-1} \sqrt{D_1};$$

onde la (4) dà luogo a

$$p = v_1 p_1 \,|\cos\alpha_1|,$$

nonchè, coi simboli suggeriti da un ovvio procedimento ricorrente, a

$$p = v_1 \cdot v_2 \dots v_{n-1} \cdot |\cos\alpha_1| \cdot |\cos\alpha_2| \cdot \dots |\cos\alpha_{n-3}| \cdot \sin\theta_{n-2,\, n-1}:$$

in particolare a

$$p \leq v_1 v_2 \dots v_{n-1}$$

col segno $=$ quando e soltanto quando gli $n-1$ fattori di $\mathbf{p}$ sono a due a due ortogonali . . . .