Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Vivanti

Su certe serie di potenze

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.5, p. 265–266.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_5_265_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

PICCOLE NOTE

Su certe serie di potenze.

Nota di G. VIVANTI (a Milano).

Sunto. - *Si danno dimostrazioni semplici di alcuni notevoli risultati relativi alle funzioni razionali generati dalle serie di potenze* $\Sigma n^m z^n$.

L'ing. J. BABINI [1] ha stabilito alcune proprietà notevoli delle funzioni razionali aventi come elementi generatori le serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^m z^n$ (m intero positivo). I risultati da lui trovati si possono ottenere in modo più semplice come segue.

Indichiamo con $f_m(z)$ la funzione razionale generata dalla serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^m z^n$. Si trova:

$$f_0(z) = \frac{1}{1-z} - 1, \quad f_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad f_2(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3},$$

$$f_3(z) = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4}, \quad f_4(z) = \frac{z(1+11z+11z^2+z^3)}{(1-z)^5}.$$

Queste espressioni suggeriscono la formola generale:

$$f_m(z) = \frac{z\varphi_m(z)}{(1-z)^{m+1}}, \tag{1}$$

dove $\varphi_m(z)$ rappresenta un polinomio *reciproco* (cioè a coefficienti simmetrici eguali) di grado $m-1$ avente il primo (e quindi anche

[1] « Boletin del Seminario Matematico (Argentino) », Tomo 3, 1932-33, pp. 163-173, 197-199 (la tabella dei coefficienti contiene vari errori). V. anche: J. REY PASTOR, ivi, pp. 174-180; H. ORY, « Rendic. Circolo Matematico di Palermo », Tomo 54, 1930, pp. 366-370; M. ALES, ivi, p. 462.

l'ultimo) coefficiente $=1$ e gli altri reali e positivi, cioè tale che, posto:

$$\varphi_m(z) = \sum_{h=0}^{m-1} a_{mh} z^h,$$

sia:

(2) $$a_{m0} = a_{m,\,m-1} = 1, \quad a_{mh} = a_{m,\,m-h-1} > 0.$$

Vogliamo dimostrare la (1) per induzione completa.

Osserviamo anzitutto che $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m+1} z^m$ è il prodotto di z per la derivata di $\sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n$, donde segue, per note proprietà delle funzioni analitiche, in tutto il piano:

$$f_{m+1}(z) = z f_m'(z).$$

Ora, supposta vera la (1), si ha:

$$f_m'(z) = \frac{(1-z)[z\varphi_m(z)]' + (m+1)z\varphi_m(z)}{(1-z)^{m+2}},$$

quindi:

$$\varphi_{m+1}(z) = (1-z)\sum_{h=0}^{m-1}(h+1)a_{mh}z^h + (m+1)\sum_{h=0}^{m-1} a_{mh}z^{h+1} =$$

$$= \sum_{h=0}^{m-1}(h+1)a_{mh}z^h + \sum_{h=0}^{m-1}(m-h)a_{mh}z^{h+1} =$$

$$= \sum_{h=0}^{m-1}(h+1)a_{mh}z^h + \sum_{h=1}^{m}(m-h+1)a_{m,\,h-1}z^h =$$

$$= a_{m0} + a_{m,\,m-1}z^m + \sum_{h=1}^{m-1}[(h+1)a_{mh} + (m-h+1)a_{m,\,h-1}]z^h,$$

donde:

$$a_{m+1,\,0} = a_{m0} = 1, \quad a_{m+1,\,m} = a_{m,\,m-1} = 1,$$

$$a_{m+1,\,h} = (h+1)a_{mh} + (m-h+1)a_{m,\,h-1},$$

formola ricorrente per i coefficienti dei polinomi φ_m, che sono evidentemente reali e positivi. Ne segue:

$$a_{m+1,\,m-h} = (m-h+1)a_{m,\,m-h} + (h+1)a_{m-h-1},$$

ossia, per la seconda della (2):

$$a_{m+1,\,m-h} = (m-h+1)a_{m,\,h-1} + (h+1)a_{mh} = a_{m+1,\,h},$$

da cui risulta che $\varphi_{m+1}(z)$ è reciproco.