Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Basilio Manià, G. Belardinelli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 239–242.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_239_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

BASILIO MANIÀ: *Sopra una classe di problemi di Mayer considerati come limiti di ordinari problemi di minimo* (in corso di pubblicazione nei « Rendiconti del Seminario Matematico di Padova »).

Si riprende un metodo già applicato in un precedente lavoro *Sulla curva di massima velocità finale* (1) e lo si applica a problemi di MAYER relativi a un'equazione differenziale della forma

$$u' = f(x, y, y', u),$$

che non rientrano nei tipi finora considerati.

Diviso in n parti uguali l'intervallo fisso dell'asse delle x sul quale si proiettano ortogonalmente le curve della classe che si considera, e fissato un numero positivo H, si risolve dapprima il problema proposto nella classe delle poligonali di n lati i cui vertici si proiettano ordinatamente nei punti di divisione dell'intervallo fisso e sulle quali il coefficiente angolare della tangente è sempre in valore assoluto $\leq H$. Si passa poi al limite facendo tendere a $+\infty$ prima n e poi H.

Risulta così, sotto opportune ipotesi, l'esistenza della soluzione del problema di MAYER e si trova anche una condizione analoga alla condizione di EULERO per la curva che dà la soluzione.

Infine, supponendo che $f(x, y, y', u)$ sia indipendente da u, si ottiene una estensione ai problemi ordinari quasi–regolari normali dei risultati di H. LEWY per i problemi ordinari regolari (2).

G. BELARDINELLI: *Funzionali analitici ipergeometrici* (in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XIII, fasc. 3–4).

L'analisi delle trasformazioni funzionali ha avuto dal PINCHERLE e dal FANTAPPIÈ sistemazioni che si ricollegano rispet-

(1) In corso di pubblicazione negli « Annali della R. Scuola Normale di Pisa ». Vedi il sunto in questo « Bollettino », vol. XIII (1934), fasc. II.

(2) H. LEWY, *Ueber die Methode der Differentialgleichungen.* « Math. Ann. », Bd. 98 (1928), pagg. 107-124.

tivamente agli indirizzi classici di WEIERSTRASS e di CAUCHY relativi alle funzioni analitiche. La trasformazione di LAPLACE, l'inversione degli integrali definiti, le serie ordinate per le potenze del simbolo D, i funzionali normali, sono altrettanti capitoli dell'analisi nei quali il PINCHERLE ha dato fondamentali risultati. I concetti di funzionale analitico e di funzione analitica sono stati analizzati dal FANTAPPIÈ il quale ha mostrato che ad ogni funzionale lineare analitico corrisponde una funzione indicatrice ed inversamente ad ogni funzione indicatrice corrisponde un funzionale lineare analitico che ha quella funzione per indicatrice. Il funzionale si indica con

$$F[y(t);\, x] = \frac{1}{2\pi i}\int_c v(x,\, t) y(t) dt = f(x),$$

ove c è una curva chiusa che racchiude tutti i punti non regolari della y, lasciando all'esterno i punti in cui la indicatrice $v(x,\, t)$ non è definita.

Tra i funzionali analitici sono stati chiamati *normali* quelli caratterizzati dall'avere per indicatrice una funzione della forma

$$v(x,\, t) = -\frac{1}{t}\, k\left(\frac{x}{t}\right),$$

essendo k una funzione analitica qualunque.

Tra le funzioni più semplici, che si presentano nell'analisi, abbiamo le funzioni razionali; è stato dimostrato che i funzionali normali che hanno per caratteristica tali funzioni possono esprimersi mediante un numero finito di operazioni di derivazioni, di sostituzioni e moltiplicazioni di funzioni assegnate e viceversa. Lo studio di questi operatori è stato fatto nel modo più esauriente. Sono stati pure studiati i funzionali normali che hanno per caratteristica la funzione esponenziale.

Nel lavoro qui riassunto l'A. studia le proprietà essenziali dei funzionali normali che hanno per funzione caratteristica le funzioni ipergeometriche di GOURSAT, che, com'è noto, contengono le funzioni più usuali dell'analisi: funzione binomiale, logaritmica, esponenziale, trigonometrica, di CLAUSEN, di KUMMER, ecc..

Le funzioni ipergeometriche di Goursat possono definirsi a partire dalla serie di potenze dalla forma seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1,\, n)(\alpha_2,\, n) \dots (\alpha_h,\, n)}{(\gamma_1,\, n)(\gamma_2,\, n) \dots (\gamma_k,\, n)}\, x^n,$$

ove $(r, n) = r(r+1)\dots(r+n-1)$, funzioni che si indicano anche con

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\end{matrix}\, x\right),$$

e sono tali che il rapporto tra un coefficiente ed il precedente

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(\alpha_1+n)\dots(\alpha_h+n)}{(\gamma_1+n)\dots(\gamma_k+n)} = \frac{P(n)}{Q(n)},$$

$P(n)$ e $Q(n)$ sono polinomi *fissi* rispettivamente dei gradi h e k, $h \leq k$. I funzionali normali che hanno per caratteristica una funzione di questa forma costituiscono una classe importante di funzionali che l'A. chiama *funzionali ipergeometrici.*

Detti operatori avranno per caratteristica la funzione

$$-\frac{1}{t} F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\end{matrix}\, \frac{x}{t}\right),$$

e sono quindi classificati secondo l'ordine e la classe di questa funzione, si avranno perciò funzionali di classe zero o *completi* e funzionali di classe $k-h$, o funzionali *confluenti.*

Indicando compendiosamente questi operatori con H_γ^α, l'A. ne riduce lo studio a due funzionali elementari H_γ^α e H_γ; il primo è un funzionale completo mentre il secondo è una funzione confluente, e dimostra che

$$H_\gamma = \lim_{\rho \to \infty} H_\gamma^\rho\, y\left(\frac{t}{\rho}\right).$$

Egli applica subito questi funzionali H alle funzioni razionali e ad altre funzioni notevoli.

L'A. fa vedere che le proprietà di queste trasformazioni si ricollegano a quelle delle funzioni ipergeometriche.

Così, alle proprietà che queste funzioni hanno di rappresentare le funzioni più usuali dell'analisi corrisponde il fatto notevole che questi operatori H contengono l'operazione d'integrazione, di derivazione, l'operazione xD, l'operazioue $(xD)^n$ e x^nD^n, il logaritmo funzionale di Pincherle, ecc..

Così, dalla polidromia delle funzioni ipergeometriche discende quella dei funzionali H, per modo che, se ad esempio, la funzione y ha in un punto $\bar{t}$ un punto singolare isolato, nell'intorno del quale la y è monodroma, la f avrà in corrispondenza, per un funzionale completo in detto punto, un punto di diramazione, di cui viene studiato il comportamento.

Così, alle classiche equazioni differenziali, alle quali soddisfano le funzioni ipergeometriche, come ad esempio, l'equazione differenziale di GAUSS, ne deriva equazioni funzionali per gli operatori H, così, ad esempio, per l'operatore $H_{\gamma, 1}^{\alpha, \beta}$, si ha:

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} H + (\alpha + \beta + 1)x \frac{d}{dx} H + \alpha\beta H \right\} y = \left\{ x \frac{d^2}{dx^2} H + \gamma \frac{d}{dx} H \right\} ty,$$

e per H_γ^α, si ha:

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx} H + \alpha x H \right\} y = \left\{ x \frac{d}{dx} H - (\gamma - 1)H \right\} ty + \gamma - 1,$$

e per H_γ, si ha:

$$\left\{ x \frac{d}{dx} H - (\gamma - 1)H \right\} ty = xHy + \gamma - 1.$$

In fine, l'A. ha voluto dare un'applicazione delle proprietà date per i funzionali H costruendo un integrale regolare nell'intorno dell'origine di una equazione differenziale della fisica matematica; cioè della equazione di LAMÉ, differenziale lineare del secondo ordine, con quattro punti singolari. Perciò, determina i parametri α, γ del funzionale che considera ed i coefficienti della equazione differenziale del primo ordine, alla quale suppone soddisfi la y, e così può costruire la $f(x)$:

$$f(x) = H_\gamma^\alpha y,$$

in modo che risulti integrale della anzidetta equazione differenziale. Nella Memoria sono indicate varie questioni che l'A., per ragioni di spazio, rimanda ad ulteriori lavori.