Giuseppe Palamà

Altre relazioni fra i lati dei poligoni regolari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 235–238.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_235_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Altre relazioni fra i lati dei poligoni regolari.

Nota di Giuseppe Palamà (a Sogliano - Lecce).

Sunto. - *Si danno alcune formule relative alle somme di prodotti a* k *a* k *di lati di poligoni regolari iscritti nel cerchio di raggio* 1.

1. Riferendomi alle Piccole Note del sig. E. Ducci comparse negli ultimi numeri del « Bollettino », dò un' altra formula semplice relativa ai lati del poligoni regolari, convesso e stellati, di n lati, per n primo, inscritti nel cerchio di raggio 1.

Ponendo

$$S_k = \sum_{i=0}^{m-1} \operatorname{sen}^k (a + id),$$

indicando con P_k la somma dei prodotti a k a k dei termini della S_1 e con P_k' la somma dei prodotti a k a k dei lati dei detti poligoni regolari, poichè

$$(1) \qquad \sum_0^{m-1}{}_i \cos(a+id) = \frac{\operatorname{sen}\frac{md}{2}\cos\left(a+\frac{m-1}{2}d\right)}{\operatorname{sen}\frac{d}{2}}$$

e

$$2P_2 = S_1{}^2 - S_2,$$

essendo

$$S_2 = \sum_0^{m-1}{}_i \frac{1-\cos 2(a+id)}{2} = \frac{m}{2} - \frac{\operatorname{sen} md \cos[2a+(m-1)d]}{2\operatorname{sen} d},$$

risulta

$$2P_2 = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{md}{2}\operatorname{sen}^2\left(a+\frac{m-1}{2}d\right)}{\operatorname{sen}^2\frac{d}{2}} - \frac{m}{2} + \frac{\operatorname{sen} md \cos[2a+(m-1)d]}{2\operatorname{sen} d}.$$

Quindi per $a = d = \frac{180^\circ}{n}$ ed $m = \frac{n-1}{2}$ (v. ultima p. nota del DUCCI), si ha

$$P_2' = 4\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{cotg}^2\frac{90^\circ}{n}}{4} - \frac{n-1}{4} + \frac{\operatorname{sen}\left(90^\circ-\frac{90^\circ}{n}\right)\cos\left(90^\circ+\frac{90^\circ}{n}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{n}}\right] =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{cotg}^2\frac{90^\circ}{n}}{4} - \frac{n-1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}^2\frac{90^\circ}{n} - n\right).$$

2. Si può agevolmente vedere che non sono egualmente semplici i valori di P_3' e P_4'

Per P_3', poichè è

$$\operatorname{sen}^3\alpha = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{4}\operatorname{sen}3\alpha,$$

si ricava

$$S_3 = \frac{3}{4}S_1 - \frac{1}{4}\sum_0^{m-1}{}_i (3a+i3d) =$$

$$= \frac{3\operatorname{sen}\frac{md}{2}\operatorname{sen}\left[a+\frac{m-1}{2}d\right]}{4\operatorname{sen}\frac{d}{2}} - \frac{\operatorname{sen}\frac{3md}{2}\operatorname{sen}\left[3a+\frac{3}{2}(m-1)d\right]}{4\operatorname{sen}\frac{3d}{2}};$$

quindi dalla

$$P_3 = \frac{2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3}{6},$$

sostituendo a S_1, S_2, S_3 i valori ricavati, per $a = d = \frac{180^\circ}{n}$ e $m = \frac{n-1}{2}$, si ha, essendo P_3' uguale a otto volte il valore assunto da P_3, con le precedenti posizioni

$$P_3' = \frac{1}{6}\operatorname{cotg}^3\frac{90^\circ}{n} + \frac{2-n}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{90^\circ}{n} - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\frac{270^\circ}{n}.$$

Per P_4', essendo

$$\operatorname{sen}^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 4\alpha}{8},$$

si ha

$$S_4 = \frac{3m}{8} - \frac{1}{2}\sum_0^{m-1}{}_i \cos 2(a+id) + \frac{1}{8}\sum_0^{m-1}{}_i \cos 4(a+id) =$$

$$= \frac{3m}{8} - \frac{\operatorname{sen} md \cos[2a+(m-1)d]}{2\operatorname{sen} d} + \frac{\operatorname{sen} 2md \cos[4a+2(m-1)d]}{8\operatorname{sen} 2d}.$$

Ma

$$24P_4 = -6S_4 + 8S_1S_3 + 3S_2 - 6S_1^2S_2 + S_1^4,$$

quindi con le solite sostituzioni per a, d, m ed S_i e tenuto presente che, dopo queste sostituzioni, è $2^4P_4 = P_4'$, si ha

$$P_4' = \frac{1}{24}\operatorname{cotg}^4\frac{90^\circ}{n} - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\frac{270^\circ}{n}\operatorname{cotg}\frac{90^\circ}{n} + \frac{4-n}{4}\operatorname{cotg}\frac{90^\circ}{n} + \frac{n^2-6n}{8}.$$

3. In generale per la ricerca dei valori di P_r' e di P_r, basta tener presenti le formule

$$2^{r-1}(-1)^{\frac{r}{2}}\operatorname{sen}^r\alpha = \cos r\alpha - \binom{r}{1}\cos(r-2)\alpha + \binom{r}{2}\cos(r-4)\alpha - \ldots \pm$$

$$\pm \binom{r}{\frac{r}{2}-1}\cos 2\alpha \mp \binom{r}{\frac{r}{2}}\cdot\frac{1}{2},$$

per r pari;

$$2^{r-1}(-1)^{\frac{r-1}{2}}\operatorname{sen}^r\alpha = \operatorname{sen} r\alpha - \binom{r}{1}\operatorname{sen}(r-2)\alpha + \binom{r}{2}\operatorname{sen}(r-4)\alpha - \ldots \pm$$

$$\pm \binom{r}{\frac{r-1}{2}}\operatorname{sen}\alpha,$$

per r dispari, (v. SERRET, *Trig.*, pp. 200–203 dell'ediz. francese), dalle quali, cambiando successivamente α in a, $a+d$, $a+2d$, $a+(m-1)d$, sommando le formule che si ottengono e tenuti presenti i valori di S_1 e la (1), si ricava S_r.

Inoltre la formula di ricorrenza

$$S_r - P_1 S_{r-1} + P_2 S_{r-2} - \dots (-1)^r r P_r = 0,$$

dà successivamente i valori di P_i sino a P_r.

Quindi per $a = d = \frac{180^\circ}{n}$, $m = \frac{n-1}{2}$, essendo dopo queste posizioni

$$2^r P_r = P_r',$$

si ha P_r'.