BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

S. SUBRAMANIAN

Deviazione geodetica in uno spazio a curvatura costante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 233–235.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_233_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Deviazione geodetica in uno spazio a curvatura costante (¹).

Nota di S. SUBRAMANIAN (Annamalai - India).

JACOBI ha data la seguente equazione come definizione della deviazione geodetica in uno spazio a due dimensioni, cioè l'ordinaria superficie:

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2}+Ky=0,$$

dove y è la distanza perpendicolare di un punto della geodetica prossima dalla base, σ è l'arco della base, e K la curvatura Gaussiana della superficie.

Nella presente Nota dò una forma particolare delle equazioni di LEVI-CIVITA per una varietà generale riemanniana tale da mostrare più chiaramente la relazione fra essa e l'equazione di JACOBI.

Consideriamo una varietà ad n dimensioni colla metrica

$$ds^2=a_{ik}dx^i dx^k \qquad (i,\,k=1,\,2,\ldots,\,n).$$

Una geodetica B di questa varietà è definita dall'equazione

$$x_i=\varphi_i(\sigma),$$

dove $d\sigma$ è l'elemento d'arco di B.

Sia ξ^i l'incremento della coordinata x^i di un punto P di B in conseguenza del suo spostamento a un punto corrispondente M di g, geodetica infinitamente prossima a B. Possiamo considerare le ξ^i come componenti controvarianti del vettore elementare $PM=\xi$.

È stato dimostrato (²) che le ξ^i soddisfano alle seguenti equazioni:

$$(D^2\xi)^r+\{ir,\,hk\}\,b^i b^h \xi^k=\frac{d\lambda}{d\sigma}\,b^r \qquad (r=1,\,2,\ldots,\,n)$$

dove $(D^2\xi)^r$ denota la r^{sima} componente del vettore derivato del vettore derivato di BIANCHI del vettore ξ, le b^i sono i parametri di direzione della curva B in P, λ il coefficiente di dilatazione da B a g ed $\{ir,\,hk\}$ è il simbolo di RIEMANN di seconda specie.

Noi prenderemo una dilatazione costante e più particolarmente

(¹) Le notazioni qui usate sono quelle stesse del « Calcolo differenziale assoluto » di LEVI-CIVITA, aggiuntavi la convenzione per la sommazione rispetto agli indici.

(²) LEVI-CIVITA, op. cit., p. 215.

quella in cui il vettore PM è perpendicolare alla geodetica B. Ne segue che $\frac{d\lambda}{d\sigma}=0$, $b^i\xi_i=0$, e le equazioni si riducono al sistema

$$(D^2\xi)^r = -\{ir, hk\}b^ib^h\xi^k, \qquad (r=1, 2, ..., n).$$

Se la curvatura della varietà data è costante e uguale a K, è dimostrato (1) che

$$(ij, hk) = K(a_{ih}a_{jk} - a_{ik}a_{jh}),$$

dove (ij, hk) è il simbolo di RIEMANN di prima specie. Se ne deduce facilmente

$$\{ir, hk\} = K(a_{ih}\delta_k{}^r - a_{ik}\delta_h{}^r)$$

usando i *delta* di KRONECKER.

Le nostre equazioni nelle ξ^i divengono ora

$$(D^2\xi)^r = -K(a_{ih}\delta_k{}^r - a_{ik}\delta_h{}^r)b^ib^h\xi^k = -K\xi^r, \quad (r=1, 2, ..., n)$$

poichè $a_{ih}b^ib^h=1$, e $a_{ik}b^i\xi^k=0$, per l'ipotesi che ξ è perpendicolare a B.

Quindi finalmente possiamo scrivere le equazioni nella forma

$$\text{(A)} \qquad (D^2\xi)^r + K\xi^r = 0 \qquad (r=1, 2, ..., n).$$

Si osservi che questa equazione è di natura tensoriale e in conseguenza si conserva per tutte le trasformazioni delle variabili.

Il prof. FERMI (2) ha dimostrato che è possibile di scegliere un sistema di coordinate che sono localmente cartesiane in ogni punto di una data curva. « Quando la curva è una geodetica questo sistema ha alcune proprietà interessanti. Se C è un punto molto prossimo alla geodetica, e se D è la sua proiezione ortogonale sulla curva, si può dimostrare che il sistema è costituito dall'arco della curva misurato dall'origine 0 sulla curva fino a D e dalle componenti del vettore elementare DC in direzioni mutualmente perpendicolari e tutte perpendicolari alla curva ».

Trasformiamo ora le nostre coordinate in questo sistema perpendicolare. Se le coordinate cartesiane del punto M di g sono $y^1, y^2, ..., y^n$, si può vedere che per P è $y^r=0$, $(r\neq n)$, e y^n è lo stesso che per M. Onde se ξ diventa η dopo la trasformazione, segue che

$$\eta^r = y^r \ (r=1, 2, ..., n-1) \quad \text{e} \quad \eta^n = 0.$$

E poichè ora le coordinate sono ortogonali, il vettore derivato

(1) Ibid., pp. 232-236.
(2) Ibid., p. 167.

di BIANCHI coincide colla derivata ordinaria, ed abbiamo

$$(\overline{D}\xi)^r = \frac{d\overline{\xi}^r}{d\sigma} \quad \text{e} \quad \overline{\xi} = \eta, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Le nostre equazioni tensoriali (A) divengono ora

$$\frac{d^2\eta^r}{d\sigma^2} + K\eta^r = 0,$$

poichè K è un invariante.

Sostituendo i valori espressi per le y, le equazioni prendono la forma

$$\frac{d^2 y_r}{d\sigma^2} + K y_r = 0, \quad \frac{d^2 y_n}{d\sigma^2} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

L' ultima di queste equazioni è un' identità, poichè y^n non varia. Di qui, gl' incrementi nelle coordinate sono dati dalle $n-1$ equazioni

$$\frac{d^2 y^r}{d\sigma^2} + K y^r = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Esse danno le componenti cartesiane della deviazione PM normale in B secondo $n-1$ direzioni ortogonali tutte perpendicolari alla curva.